TECHE
UDINE

# MANOSCRITTI

# FONDO PRINCIPALE

## Manoscritto n. P_MSS_1025_VII

*Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.*

Collocazione:

**Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine**
*https://www.techeudine.it/fondo-principale*
*https://www.sbhu.it/*

VII

COMMERZ
DI LET. DE
CON. GIOR.
RICCATI
T. VII.

1025
VII

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. Ms 1025/VII

BIBLIOTECA CIVICA DI UDINE

[illegible]

Commerzio di Lettere
dal
Co. Giordano Riccati
Tomo VII.
nell' anno 1774.

# Indice degli Autori delle Lettere

Degli Azzoni Avogari (Can.co Co. Rambaldo) pag. 1

Calandrelli (Ab. Giuseppe) pag. 253, 307, 341, 375, 383, 389.

Caldani (Petronio Maria) pag. 5, 9, 41, 101, 109, 121, 123, 145, 165, 171, 175, 209, 275, 369.

Comino (Giuseppe) pag. 403.

Fanaroli (Co. Girolamo) pag. 249

Giannini (Pietro) pag. 255, 393.

Lorgna (Colon.o Anton-Mario) pag. 133.

De' Malfatti (Gian-Francesco) pag. 21, 49, 95, 155, 187, 365, 399.

Mariscotti (Giacomo) pag. 115, 131, 141, 157, 159, 353, 407.

Nicolai (Arcip. Giambatista) pag. 189, 401.

Padavilla (Ab. Gian-Antonio) pag. 379.

Polinà (P. D. Pier Maria) pag. 315.

Riccati (Co. Francesco) pag. 205, 215

Riccati (Co. Giordano) pag. 11, 13, 25, 37, 43, 61, 73, 91, 111, 117, 125, 129, 135, 143, 161, 173, 177, 181, 207, 213, 217, 219, 237, 257, 263, 273, 277, 323, 325, 327, 329, 333, 345, 349, 355, 357, 371, 373, 381, 387, 395, 405.

Roberti (Ab. Co. Giambatista) pag. 367.

Sacchi (P. D. Giovenale) pag. 261,

Storti (Gaspare) pag. 93, 107.

Troili (Ab. Domenico) pag. 139, 185.

Van-Augardan (Ab. Alberto) pag. 59.

Zorzi (Ab. Alessandro) pag. 397.

Ill.mo Co. Padrone ed Amico Stim.mo
Friuli 7 Lbl 1778 9

I colmelloni di linera fanno due effetti, l'uno di dividere le acque, acciochè non ne entri che certa quantità; ed a spiegare tale uso, pare proprio il vocabolo di castellum; che il Mar. Poleni de Castellis per così descrive: "Arcen quam non modo fluminibus iis fecisse Alveos, verum etiam, ne ex Alveis flumina effluerent et curavisse et curare pluribus modis; aut moliendo aggeres; aut nimis rapidum aquae motum augendo; aut nimis [illegible] lenem; aut aquam per fossas derivando; ita vero fieri talem derivationem, ut per fossas ipsas per [illegible] in aggeribus [illegible] influant aquae. L'altro effetto è per impedire i danni delle piene, mediante quelle che si chiamano Rotte, e Bovoni, i quali latinamente si dicono cataractae: il nome nell'etimologico "vocantur etiam hoc nomine portae, quibus sublatis fluminum aquae emittuntur, ac demissis, retinentur" così Roberto Stefano nel Tesoro, che non cita neppur egli esempio d'antico autore, ma il solo Budeo, soggiungendo che vulgo vocantur des bondes: cioè in francese, che si volgarizza chiusa, canale, veduto chiave. Il Dizionario del Facciolati reca il medesimo significato, e buttata Plinio [illegible], ma quel verso [illegible] non si può ritrovare in alcuno de' due Plinii. Bensì nelle Lettere del [illegible] lib. X ep. [illegible] si legge: "Quibusdam [illegible] fossam longius ducere, et arctius [illegible] mari [illegible] in flumine, sed in ipsum mare emittere, cui [illegible] maris servabit et reprimet quicquid [illegible] venit. Ci [illegible] il nihil nobis loci natura praestaret, expeditum tamen cataractis aquae cursum temperare. Nella Barbara traduzione posta in Livio [illegible] a Francesco il vocabolo da camera, ma di quella grave... re, i colmelloni si chiamano Rotta; e lo scrivono [illegible] del [illegible] XVI de Antiq. urbis Pat. lib. 2 p. 87. Ma che Franco della Carrara scrive [illegible] Lettere nel quale pretendesi, che sia caduto il N.ro C. Vincenzo non seppe veramente il punto, su cui si appoggia la questione, e non avevo presso di me la Lettera postuma stampata nella raccolta del P. Mandelli. Sperava, ed ho sperato di giorno in giorno di avere gli esemplari di d.a Lettera, e di quel mio scartafaccio sulle [illegible] vive, a cui non hanno finora [illegible] di positivo, ma ho sperato indarno. Dalla med.a Lettera

Rostrum, ut scribitur erexit. Il Sig. Ab. Antonelli credeva, che la
questa Rosta, o Colmelloni potessero appellarsi Pili; ma questi
in Vitruvio lib. V. cap. 12. ch'è de Portubus et structuris in aqua
faciendis, sono piuttosto quasi grosse colonne, o massi fatti per
sostener i moli de' Porti: onde anco Virgilio, lib. IX. v. "qualis in
"Euboico Bajarum littore quondam Saxea Pila cadit, magnis quam molibus
"libus ante constructam jaciunt Ponto = Sarà dunque che più
propriamente potrebbe tradursi de Castellis et Cataractis Limine
vernacolo Rosta, giacchè l'aggiunta è troppo generica espres-
sione.

Quanto alla voce Sperone, osservo che il Guglielmini, De Natura
Fiumi nel libro stampato in Bologna l'an. 1739. colle note di Eustachio Manfredi
non lo adopera, ma dice in genere ripari ad angolo acuto. Li
no Speroni, avrà forse data occasione ai moderni matematici di
re tali ripari Speroni; ma non so che Rostra in latino si abbiano
minati. Nel Trattato della Direzione de' fiumi di Famiano Michelini
detti Pignoni così questi ripari di qualunque figura, e così pure
nominò il Viviani; onde la Crusca spiega: "Pignone, riparo di muro
"si fa fatto alla ripa de' Fiumi in verso l'Acque, Lat. moles aquis
opposita: il che indica non aversi nella lingua latina termine partico-
lare. Nel Dizionario del Seminario di Padova è detto "Arcae appellat
"Vitruvius l. V. c. 12. Tabulationes intra aquam ec. ad arcendas aquas, Alii
"aquaria septa vocant, il qual pure è generale vocabolo, che vale a
indicare ogni riparo di qualunque figura. Ultimamente poi l'Approvazione
dall'Ab. Van-Aelgarden certo è generalissimo, e sembra più opportuno
l'accennato nella Crusca moles aquis opposita, colla giunta ad Rostri
formam, vulgo sperone. Ma per ben intendere tali operazioni è ne-
cessario l'aggiugnersi le sue figure, come fanno i citati Michelini
e Guglielmini.

Dal Sig. Ab. Tiraboschi altro non seppi, che lui aver avuto

che la Lettera di Lei, ch'io gli feci tenere, la quale mi soggiugne, sarà
... nel p.° To. che si stamperà del Giornale, e come egli desidera,
... moverò alquanto l'espressione da lui additatami; poichè, quanto al
per rimanente, parmi che non faccia bisogno di alcun cambiamento: ed è
... bene, che certi scioli provino un po' di confusione per la loro ignoranza
... L'Autore dell'Efemeridi troppo decisivo, e sovente poco equo e non
... intelligente giudice delle produzioni del nostro Sig. Ab. Vincenzo; meri-
... terebbe ancor egli talora sentir il rossore di essere corretto: così pure stimo
... sarà del Sig. Ab. Perfetti, che minaccia di dar fuori la sua Risposta.
Mi consolo grandemente dello stato di salute della Sig.ª Co. di Lei
... figura, che va felicemente avanzando; pregola di riverirla in mio no-
me, e il mio fratello, il quale molto si compiace di veder avve-
rati gli pronostici ch'egli fece dello stabilimento di Lei in buona sani-
tà, quando comunemente se ne temeva.
Favorirà di rimandare i fogli dell'Efemeridi, e il Tomo
degli opuscoli, se il ritorno suo costì si prolungasse qualche tempo.
Frattanto serbimi Ella la grazia ed affezione sua pregia-
tissima; come io sono e sarò sempre colla stima più sincera

Di Lei Ill.mo Sig.r Conte

Div.mo obbl.mo Serv.e ed Amico
Marcantonio de' Mozzi Augusto

nel quale pretendesi, che sia caduto il Sig. C. Vincenzo per non sapere veramente il punto,
su cui si appoggia la questione, e per non avere presso di me la Lettera postrema stampata
nella raccolta del P. Mandelli. Sperava, ed ho sperato di giorno in giorno di avere
gli esemplari di d.a Lettera, e di quel mio scartafaccio sulle forze vive, a cui non
hanno finora risposto nulla di positivo, ma ho sperato indarno. Della med.a Lettera

All'Nob. Sig.r Sig.r Pad.e Col.mo
Il Sig.r Co. Giordano Riccati

Franco

Ill.mo, e Nob.mo S.r Co: S.r S.r P.ron Col.mo



Nob.mo Sig.r Co.e Sig.r P.ron Col.mo

Dopo tanto tempo rompo il silenzio con Lei Nob.mo S.r Co:, silenzio, che ho creduto di dover tenere per non esserle molesto. La risposta però del S.r Gioachino Pessuti alla Lettera postuma del fu S.r Co: Vincenzo di Lei fratello, e mio dilettissimo Maestro di sempre acerba, ed egualm.e onorata memoria, non vuole, ch'io taccia più con Lei ad onta ancora, che dovessi togliere qualche momento ai suoi studj per donarlo a me in questa circostanza, giacchè donandolo a me viene a spenderlo, e a conservarlo a cose, che tanto riguardano il S.r Co: Vincenzo, e quegli studj medesimi alla fine, ch'ella coltiva con tanto onore della Rep.a Letteraria. Veduta, e riletta la d.a risposta non ho potuto ben intendere qual sia il paralogismo, nel quale pretendesi, che sia caduto il S.r Co: Vincenzo per non sapere veram.e il punto, su cui si appoggia la questione, e per non avere presso di me la Lettera postuma stampata nella raccolta del P. Mandelli. Sperava, ed ho sperato di giorno in giorno di avere gli esemplari di d.a Lettera, e di quel mio scartafaccio sulle Forze vive, a cui non hanno finora risposto nulla di positivo, ma ho sperato indarno. Dalla med.a Lettera

4

6

avrei forse potuto raccogliere precisamente il punto della questione, e con
pensare, se avessi potuto dare una risposta conveniente. Il S.r Co: Vincenz
ha prodotte molte cose sopra gl'immaginarj, e non par credibile, ch'egli
non sapesse, che $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Però pare, che consista il trionfo di V.
Gesuiti. La spaccia, come una scoperta, ma per verità è cosa assai piccola
e leggera, ed io potrei portargli molte altre sciocchezze che nascono dalla
combinaz.e moltiplicaz.e, e divisione degl'immaginarj, [illegible] mai
di farne un capitale così grande, com'egli fa della suddetta formola.
Potrei forse accordare ancora, che non crede essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ formola immagi
come dovrebbe essere, se fosse essa $= \sqrt{-1}$. Imperocchè egli è certo, che
la d.a frazione riducesi alla proporzionalità $1-\sqrt{-1} : 1+\sqrt{-1} :: 1 : \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$; ma
essendo i due primi termini immaginarj, il 3.o reale, dee necessariamente
anche il 4.o esser reale $= \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$. Ma dirò alora altra [illegible], di che
la supplico, è di farmi avere una copia della sud.a Lettera [illegible]

Ill.mo, e Nob.mo Sig. Co: Sig. Sig. Pad.ne Col.mo

Ho scritto a Livorno per avere l'Operette del Sig. Cassuti. Studierò ben bene l'una, e l'altra, ma intanto la prego a volermi significare il suo sentimento sempre da me pregiatissimo, e di soffrir l'incomodo di legger poi, e correggere quanto mi inspirerà di stendere a difesa del Sig. Co: Vincenzo, se mi riuscirà. Perdoni il disturbo, e desideroso sempre dell'onore de' suoi comandamenti passo con tutto l'ossequio a protestarmi

Di Lei Nob.mo Sig. Co: Sig. Sig. Pad.ne Col.mo

Roma a 21 Genn.o 1778

Um.o, Div.mo, Obbl.mo Servo
Petronio M.a Caldani

6

Ill.mo, e Nob.mo Sig.r Co: Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

Per quanto io abbia rivoltati i tomi delle instituzioni analitiche del Sig.r Co: Vincenzo non ho saputo trovare il capo, contro il quale si è mosso il Sig.r Abb.e Pessuti; ed aspetto di essere da lei illuminato Nob.mo, e dottissimo Sig.r Co: Essendo ignaro de' fondamenti, su quali ha il Sig.r Co: Vincenzo appoggiato il calcolo controverso dal Sig.r Pessuti nulla non posso nè ardisco di pronunziare. La formola $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ è veramente immaginaria; ma pare un po' troppo avanzata la proposizione espressa nell' effemeridi, che il Sig.r Co: Vincenzo essendo giunto alla formola $4\sqrt{-1}\,.\,l-a\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ non è giunto poi a compire la dimostrazione per non essersi avveduto, che $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$. Che bisogno? Senza saper questo arcano sa ogni principiante, che $4\sqrt{-1}\,l-a+4\sqrt{-1}\,l\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=$ $=4\sqrt{-1}\,l-a+2\sqrt{-1}\,l\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)^2=4\sqrt{-1}\,l-a+2\sqrt{-1}\,l\,\frac{2\sqrt{-1}}{-2\sqrt{-1}}=4\sqrt{-1}\,l-a+2\sqrt{-1}\,l-1=4\sqrt{-1}\,l-a+2\sqrt{-1}\,l\,\sqrt{-1}^2$ $=4\sqrt{-1}\,l-a+4\sqrt{-1}\,l\,\sqrt{-1}$, da che discende necessariamente, che $4\sqrt{-1}\,l\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=4\sqrt{-1}\,l\,\sqrt{-1}$ come vuole il Sig.r abb.e Pessuti. Ma che perciò? Non è questa la differenza della formola finale del Sig.r abb.e dalla formola finale del Sig.r Co: Vincenzo nella predicata scoperta (perdoni il termine) che $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$, ma conviene, che sia, e consista in altro assoluto. E qualunque sia la sua equivalente ad $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$, non può nascere o si adoperi essa stessa nel calcolo, o l'equivalente, non può nascere la enorme sproporzione, che

proposta dal Sig.r Saladini si legge nel to. XIX ...
pag. 247 dalla Raccolta dal P. Mandelli
Sono debitore pertanto di risposta alla Scrittura annessa alla lettera 2.da, che non ho [illegible] posatamente

si ravvisa [illegible] tra la circonferenza e il diametro tenendo la formola
del Sig.r Pessuti in paragone della formola del Sig.r Co: Vincenzo. Che ne pa[illegible]
a Lei Sig.r Co.te? Godrò sommamente, e le ne avrò infinito obbligo di esse[illegible]
da lei illuminato, ed istrutto. Forse in un foglietto potrebbe farsi capi[illegible]
intanto al pubblico, che non incide, che pretende il Sig.r abb.te Pessuti, e i[illegible]
cata la diff.za delle formole su di che sentirò volentieri il savissim[illegible]
di lei parere, e con pienissimo ossequio mi protesto
Di Lei Nobil.mo Sig.r Co: Sig.r Sig.r Pad.n Col.mo

Roma 3 Feb.o 177[illegible]

umil.o, div.mo, obbl.mo [illegible]
Petronio M.a Caldani

proposta dal S. Saladini si legge nel to. XIX. pag. 247 della Raccolta del P. Mandelli.

Sono debitore pertanto di risposta alla Scrittura annessa alla lettera 2.da, che non ho [illegible] posatamente

Ill:mo Sig:ra Sig:ra Prone Colmo 13

Presa per mano la Dissertazione sul Suono falso, ...

Ill:mo Sig:re Sig:re Prone Colmo 14

La Sig:ra Giulia ... ha scritto al Sig. Cav. Cristoforo di Rovaro, che Ella Sig.r Gianfrancesco stimatis.ma mi ha inviate due lettere accompagnate da una lunga scrittura, della quale non ha per anco ricevuta risposta. Alla lettera ... risposi, ed in essa procurai di sciogliere le difficoltà intorno alla rigidità naturale, riservandomi di rispondere alle sue dottissime osservazioni sulla mia Dissertazione del Suono falso, quando fossi ritornato a Treviso. La lunga infermità della ... mia Cognata ha prolungato il mio ritorno, che è seguito soltanto l'ultimo giorno di Gennajo. La settimana ... le spedirò la risposta alle riflessioni, che riguardano il Suono falso. Alla prima lettera ... ho risposto solamente in parte, ed Ella nella sua seconda lettera dell'ultimo di ... ne accusa la ricevuta. La mia Soluzione della difficoltà proposta dal P. Saladini si legge nel To. XIX. pag. 267 della Raccolta del P. Mandelli. Non dubitava pertanto di risposta alla Scrittura annessa alla lettera 2.da, che non ho ...

posatamente

peratamente presa per mano, essendomi impegnato in lunghi calcoli necessarj per comporre una nuova Lettera diretta al Sig.r Co. Girolamo Tornielli, nella quale supponendosi applicata una penna al punto medio di una corda, determina il tempo impiegato a passare dalla prima posizione alla nuova isocrona bilanciata o semplice di un ventre solo, ovvero composta dalle due semplici di un solo, e di tre ventri. Le domando dunque scusa della mia tardanza, e procurerò di supplire quanto prima al preciso debito che mi corre.

Intanto la prego de' miei umilissimi complimenti alla mentovata Dama, per cui professo piissima venerazione, e colla maggiore stima ho l'onore di protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Traversol. S. Tale ...

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco
de' Malfatti. Ferrara

Letta per minore la Dissertazione sul Suono falso,
opposso meglio considerare la dottissima sua osser:
vazioni e La sostituzione fog. 4 e nel somma

Presa per mano la Dissertazione sul Suono, passai a leggere attentamente le dottissime sue osservazioni. La sostituzione $\log. y = u$ nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica riferita al protonumero $a$, e formata della suttangente $= 1$, di cui mi servo per ridurre alla prima differenza l'equazione $-g\frac{ddy}{y} = q x \cdot dx^2$, richiede la formola differenziale $\frac{dy}{y} = -du$. Differenziando nuovamente avremo $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} = -ddu$, ovvero $\frac{ddy}{y} = -ddu + \frac{dy^2}{y^2}$: ma $\frac{dy^2}{y^2} = du^2$, dunque $\frac{ddy}{y} = -ddu + du^2$, ch'è quella formola, di cui mi sono servito. Che poi all'equazione $\log y = u$ nel ramo delle ordinate calanti corrisponda quest'altra $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{u}{c}}$ nella supposizione, che $c$ sia il protonumero, ed $a$ l'ordinata che si riferisca all'assissa $u = -c$, non può ~~rivocarsi~~ in dubbio. In fatti ponendo $u = 0$, si trova $y = c$; ponendo $-u = c$, o sia $u = -c$, ci si presenta $y = a$ dalla parte delle ordinate crescenti; e finalmente facendo $u = c$, ne risulta $y = \frac{c^2}{a}$ dalla parte delle ordinate calanti, ch'è quella che serve al problema.

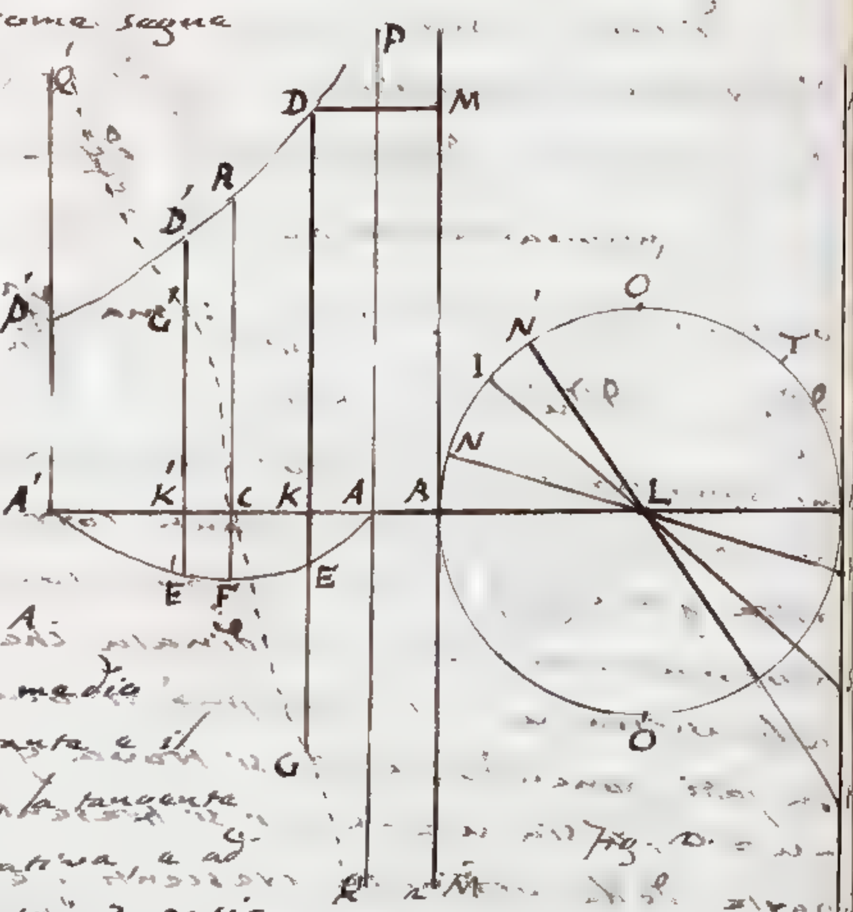
La conseguenza, ch'io cavo al § x, che posta $z = \int -2dx = c$, sia $z$ infinita, si può dimostrare così.

Essendo

$z = \infty$. Ma a quest[illegible] infinita [illegible] generalmente $\frac{dy}{?}$ non è quantità [illegible] la sua risposta.

Il cambiamento fatto nella fig.a 2 fa realmente svanire la difficoltà, che le aveva proposta; ma mi resta sempre il dubbio sulla sua integrazione al § 21. Certamente qui Ella recede

Essendo $du = -2dx = -\frac{dy}{y}$, avremo $2dx = \frac{dy}{y}$
ma quando $u = \infty$ ; $y$ svanisce; dunque in tale ipo-
tesi $2dx = \frac{dy}{0}$ ... poichè $\frac{dy}{0} = \infty$, sarà pari-
mente [illegible] $\infty$, e molto più $z$ ; il che &c.
Svanirà la difficoltà proposta in riguardo al $S x$
cangiando come segue




la fig. [illegible] Si seguino da principio le tangenti B'H positive. Alla B'H = $\infty$ corrisponderà il quadrante B'O relativo al punto A.
Si haverà [illegible] media fra il quadrante e il semicircolo la tangente diverrà negativa, e ad essa si riferirà $z$ posi-
tiva per esempio = KG.
Diverranno poscia = 0 rispettivamente al punto C
la tangente $p$, e l'ordinata $z$. Dopo ciò la tan-
gente tornerà positiva, e l'ordinata $z$ si can-
gerà

gerà in negativa, agguagliandosi a campo... alla Corda Ascendente quanto alla ... punto A corrispondente all'arco B'OB'B' – uguale a tre quadranti nelle ipotesi, che la corda si vibri intera, dimostrache sia ... mente la figura. Suppongasi ... ancora la vera integrazione della formola $-\frac{dy}{y^{\frac{4}{3}}} = \frac{C^2 dp}{C^4 + p^2}$ ... o sia dell'equivalente $\frac{dy}{y^{\frac{4}{3}}} = -\frac{C^2 dp}{C^4+p^2}$ è quella che segue $B + 3y^{\frac{1}{3}} = \text{Arco Rag. C Tang.} - p$, e determinata che sia la costante $B$,

$$3\cdot y^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}} = \text{Arco Rag. C Tang.} - p - \text{Arco Rag. C Tang.} -\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$$

Ma sin che ad una tangente negativa ... corrisponderà un arco positivo, e chiara ... tangenti una negativa, e l'altra positiva si riferiscono ... Perchè ... Arco Rag. C Tang. $-p$ = Arco Rag. C Tang. $p$ x ad Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$, e conseguentemente $3\cdot y^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C Tang. $p$ – Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$, ch'è quella formola, di cui mi sono servito, e che senza dubbio conduca al giusto.

Servirà per ... il § la riflessione, che ... le corde si vibrano intere o ... in numero di parti, debbiano adattarsi ...

$z = \infty$. Ma a ... è quantità infinita. ... generalmente $\frac{dy}{y}$ non è quantità ... la sua risposta.

Il cambiamento fatto nella fig.ª 2 fa realmente svanire la difficoltà, che le avevo proposta; ma mi resta sempre il dubbio sulla sua integrazione al § 21. Certamente qui Ella recede

a curva della stessa natura, e possono costantemente curve simili accomodarsi. La formola $-\frac{ddY}{Y} = \frac{2MQdQ^2}{AL^3P}$ appartenente alla curva in cui si piega una corda triangolare, ci insegna, che la quantità $-\frac{ddY}{Y}$ sarà costante, quando siano tali $Q$, e $dQ$, qualunque valore abbia $Y$ nell'atto che la corda si vibra. Un'altra corda triangolare simile, ugualmente densa e grossa, e tesa dallo stesso peso richiederà l'equazione $-\frac{ddy}{y} = \frac{2mqdq^2}{al^3p}$, in cui parimente si verificherà, che supposti costanti $q$, e $dq$, sia altresì costante $-\frac{ddy}{y}$, assegnata ad $y$ dentro i limiti della quantità finita minima qualsivoglia grandezza. Si stabilisca $Q : q :: dQ : dq :: L : l$, sarà perchè $M : m :: L^3 : l^3$, avremo $\frac{ddY}{Y} : \frac{ddy}{y} :: \frac{L^3}{A} : \frac{l^3}{a}$. Se le corde si adattino a due curve simili, sarà $\frac{ddY}{Y} = \frac{ddy}{y}$, e per conseguenza $\frac{L^3}{A} = \frac{l^3}{a}$, e passando all'analogia $A : a :: L^3 : l^3$, cioè a dire i valori della curva come i cubi delle lunghezze. Ora la grandezza di $\frac{ddy}{y}$ non si altera al cangiarsi dell'ordinata $y$, mentre si vibra la corda.

dunque

Bisognerà anche quando $y = \ldots$, sarà $\frac{ddY}{Y} = \frac{ddy}{y}$, e perciò nella detta ipotesi $ddY = ddy$; il che è

Ecco messa in vista una bella proprietà delle corde simili, che ad ascisse analoghe corrisponda sempre la quantità costante $\frac{ddy}{y}$, qualunque sia la grandezza della ordinata $y$ relativa alla data ascissa.

Poichè Ella ha tentato di assoggettare la formula $gdx + \ldots dy + q\,d\,q = 0$ ad una delle sue considerazioni, e sempre ha ritratto assurdo, io [illegible] ben volentieri una tal fatica. Col mezzo del nuovo ritrovato ne ho effettuata la costruzione, della quale per altro non mi [illegible] servito nella Dissertazione del Suono falso; perchè [illegible] mi dà soltanto meccanicamente il valore della costante, e questa è la ragione per cui ho dovuto valermi del nuovo metodo di mia invenzione, che mi guida a determinare col calcolo la grandezza della [illegible] costante, e per conseguenza il tempo speso in una vibrazione.

Se [illegible] delle differenze parziali i sommi Geometri Eulero, d'Alembert, e la Grange giungeranno a [illegible] i tempi della vibrazione della corda, le cui [illegible] non [illegible], [illegible]

infinitamente

$\frac{\sqrt{V}+1}{\sqrt{V}-1}$

$z = \infty$. Ma a [illegible] infinita [illegible] generalmente $\frac{dy}{0}$ non è quantità [illegible]

la sua risposta.

Il cambiamento fatto nella fig.ª 2 fa realmente svanire la difficoltà, che le aveva proposta [illegible] ma mi resta sempre il dubbio sulla sua integrazione al § 21. Certamente qui Ella recede

infinitamente il loro valore. Sommamente difficile è altresì il ridurre a calcolo il moto di una corda, mentre passa dalla prima posizione ad una curva isocrona bilanciata. Le curve intermedie sono tutte di indole differente, e le innumerabili comunicazioni di moto da una particella all'altra, che continuamente succedono, rendono il problema superiore alle forze umane.

Non so se io abbia quanto basta soddisfatto alla proposta difficoltà; so bene, che me ne sono approfittato, modificando alcuni passi della Dissertazione, e aggiungendo [illegible] Sig. Ab. Zuzzi si risolvesse [illegible] spedirvi le correzioni.

Il Sig. Ab. Rossetti è l'Autore dell'Estratto delle Istituzioni Analitiche di mio fratello inserito nel Giornale di Modena, in cui a molte lodi unisce parecchie critiche. [illegible] Mons. dell'Ab. Vincenzo ho veduto una Lettera, nella quale si difende dalle accuse del Sig. Rossetti, e ch'io ho pubblicato nella Raccolta del P. Mandelli. Ora è uscita dalle stampe di Livorno la Risposta del detto Sig. Ab., di cui voglio procurarmene una copia. Intanto venge avvisato dal Sig. Lorenzo Caldani, che egli pretende, che [illegible] sia [illegible] e che molte, si [illegible]

$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$

$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Non c'è cosa più facile quanto il dimostrare questa verità, bastando moltiplicare, e dividere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ per $1+\sqrt{-1}$, onde ne risulti

$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, e per conseguenza

$\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Ma qual frutto ne raccoglierà da ciò il Sig: Ab: ?

Dalla formola $\frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$, che esprime per la tangente $= z$ l'elemento dell'arco circolare, il cui raggio $= a$, mediante la sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, passa mio fratello a questa altra

$\frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{dt}{t}$, e prendendo a per sottotangente e per protonumero $\int \frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l\, t$

$= \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{az+a^2\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$. Ecco dunque ridotto l'arco circolare al logaritmo immaginario di un numero immaginario come afferma l'Ab. Vincenzo. Il numero $\left(\frac{az+a^2\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ è senza dubbio immaginario, e tale altresì è $l\left(\frac{az+a^2\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ agguagliandosi al doppio di un arco circolare diviso per $\sqrt{-1}$ ~~...~~ l'arco. [illegible]

$z=\infty$. Ma a questo [illegible] infinita. [illegible]
generalmente $dy$ non è quantità
la sua risposta.
Il cambiamento fatto nella fig.a 2 fa realmente svanire la difficoltà, che le aveva proposta; ma mi resta sempre il dubbio sulla sua integrazione al § 21. Certamente quì Ella recede

si eguaglia alla metà di un quadrante, e quin[di] nella detta circostanza $\int \frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.a. \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ $= \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.a\sqrt{-1}$; formula che torna a confermar[e] l'asserzione di mio fratello. Il Sig.r Ab. avreb- be ragione, se gli fosse riuscito di provar essere reale il valore di $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$; ma aven- dolo trovato immaginario, egli malamente incolpa di errore l'Ab. Vincenzo.

Quanto prima prenderò a considerare matura- mente la seconda sua Scrittura, ed intanto rinnovandole gli attestati della mia divo- zione, mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 13; Feb.o 1776

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti · Ferrara

Div.mo Obbl.mo Serv.re
Giordano Riccati

Ill.^ma Sig.^ra Sig.^ra Pro.ne Col.ma 25



Supplico il Sig.^r Gianfrancesco Simat.^ma ad esaminare

Ill.mo Sig.^r Conte Sig.^r e Pron.^e Col.mo 21

Ho letto attentamente le risposte di V. S. Ill.ma alle mie riflessioni sulla dottissima di lei dissertazione sopra il suono falso; e spero, che Ella mi permetterà, che io replichi ancora qualche cosa per ritrar da lei nuovi lumi, e maggiore intelligenza della sua bella dottrina.

Resto pienamente convinto della verità della sua formola $y = c\left(\frac{b}{c}\right)^{-\frac{u}{c}}$, anzi mi sono meravigliato di me medesimo, come abbia potuto muoverle difficoltà in una cosa sì chiara, e nota a tutti i principianti.

Non son però quieto su ciò che riguarda il § X; nè la dimostrazione, che Ella fa, per provare che $z$ è infinita, quando $y$ è nulla, mi convince del tutto. La mia difficoltà cade sull'asserto: e poiche $\frac{dy}{0} = \infty$; la verità della qual proposizione non è per me chiara. Mi spiego con un esempio. Sia l'equazione differenziale $\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} = z\,dz$, la quale integrata senza aggiunta di costanti, dà $16y = z^4$, e porta a una parabola di quarto grado, colle ascisse $z$ prese nella tangente, quando $y$ siano le ordinate. Dalla equazione integrale abbiamo, che ove sia $y=0$, è parimente $z=0$. Poniamo ora nella sua differenziale $y=0$, ed avremo $\frac{dy}{0} = z\,dz$. Se valesse generalmente la proposizione che $\frac{dy}{0}$ sia quantità infinita, converrebbe concludere; dunque $z\,dz$ quantità infinita, e molto più $z$, e sarebbe vero anche nel nostro caso, che ad $y=0$ corrisponderebbe $z=\infty$. Ma a quell'ipotesi corrisponde in vece $z=0$. Dunque generalmente $\frac{dy}{0}$ non è quantità infinita. Sentirò volentieri la sua risposta.

Il cambiamento fatto nella fig.^a 2. fa realmente svanire la difficoltà, che le aveva proposta; ma mi resta sempre il dubbio sulla sua integrazione al § 21. Certamente quì Ella recede

20

si eguaglia alla metà di un quadrante, e quindi nella detta circostanza $\int \frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \, la \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ supp

22

dal metodo, che avrà usato sempre, quando le si siano presentat[e] da integrare simili formole. Per diffendere la sua integrazi[one] Ella fa questo raziocinio. « Ad una tangente negativa può cor[ris]pondere un arco positivo, e a due uguali tangenti, una neg[ativa] e l'altra positiva si riferiscono due archi eguali. Dunque Arco Rag. C. Tang. $-p$ = Arco Rag. C. Tang. $p$ &c. »

Primieramente, quando si considerino solo archi minori di un semicir[colo] a una tangente negativa corrisponderà un arco positivo, che sar[à] il complemento al semicerchio dell'arco, che corrisponde ad un[a] egual tangente positiva; e quindi questi due archi diversi non si voglion confondere insieme. Parmi poi, che non sia permes[so] l'instituire un'equazione tra un arco positivo, che si riferisce [a] tangente positiva, ed un eguale arco negativo, che si riferisc[e] a una tangente eguale negativa; perchè sebbene, rapport[o] alla grandezza considerata in se, questi archi sieno eguali non lo sono rapporto alle direzioni, perchè una è contrari[a] all'altra. Potrei io stabilire questa equazione $x = -x$? che no, fuori del caso in cui $x$ sia $= 0$. Così se fosse vero, che Arco Ragg. C Tang. $-p$ = Arco Rag. C. Tang. $p$, di[ffere]nziando sarebbe altresì vero che $\frac{-C^2 dp}{C^2+p^2} = \frac{C^2 dp}{C^2+p^2}$, il che no[n] si verifica, se $C$, o $dp$ non è zero. Insomma o si conf[ronta] l'arco positivo di tangente $-p$ col positivo di tangente $p$, e non vi può essere equazione tra questi due archi, perchè l'u[no] è il complemento a due retti dell'altro; o si confronta l'[arco] negativo di tang. $-p$ col positivo di tangente $p$, e non vi [può] essere equazione, perchè appunto uno di essi è positivo, e l'al[tro] negativo. Fallo io? Forse sì, ma sarò da lei illuminato.

Ill:mo Sig:re Sig:re Leona Cotrico 25

Supplico il Sig:r Gianfrancesco Sommat.mo ad esaminare

23

La dimostrazione, che Ella mi dà della bella proprietà delle corde simili, che si vibrano, è sicurissima, e toglie quell'imbarazzo, che portavano le parole della sua dissertazione, che ad ascisse proporzionali alle lunghezze delle corde triangolari simili corrispondessero ordinate eguali. Ella per andare innanzi aveva sol bisogno di dimostrare, che qualunque siano queste ordinate analoghe alle sue ascisse, sempre $\frac{ddY}{Y} = \frac{ddy}{y}$. La similitudine delle curve in cui si ripiegano, presentano subito questa verità. Dunque non v'è bisogno d'altro, e il resto del raziocinio è giustissimo, e degno di chi l'ha fatto. Ella mi perdonerà, se ho voluto esserle anche questa volta importuno. Ho sollecitato a scriverle, perchè il Sig. Ab. Zorzi, che le fa i suoi complimenti, mi commette di dirle, che non solo è per stampare la sua dotta dissertazione, ma di più che vorrebbe darla alle stampe presto, avendo già scritto al Pazzini di Siena, che a Quaresima vuole che s'incominci la stampa del Prodromo, per averla compita a Pasqua.

Mi ha fatto vedere la peregrina scoperta del Sig. Ab. Pessuti, il quale credo, che sia l'Autore dell'estratto avvisato nel Giornale di Pisa, e non in quello di Modena, come Ella mi ha scritto. Certamente in quel di Modena, che io letto, non ho veduto le critiche, che Ella mi accenna. Cercherò di vederle nell'altro, e mi aspetto di trovare il valore di esse appunto eguale a $\sqrt{-1}$. Io sono con pieno rispetto

Di V.S. Ill.ma Ferrara li 17 Febb.ro 1778

Dev.mo Oblig.mo Osseq.mo Serv.e Vero
G. Franc.o de' Malfatti

si eguaglia alla metà di un quadrante, e quindi nella detta circostanza $\int \frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$

22

Supplico il Sig.r Gianfrancesco Stimat.mo ad esaminare con tutto il rigore l'ingionto foglio, di cui la settimana ventura spedirò il compimento, e di comunicarmi la sua sincera e dotta opinione, premendomi molto di non mettere il piede in fallo. Se Ella averà letto il Num.o III. dell' Efemeridi letterarie di quest' anno 1776. si sarà accorto, che riferiscono l' Operetta del Sig.r Ab. Lassuti con tale parzialità, che pare non potersi difendere l' Ab. Vincenzo mio fratello dalla nota di paralogismo. Spero tuttavia che l'errore stia dal canto del Sig.r Lassuti, e la speranza diverrà certezza, quando i miei pensamenti da Lei meritino l'approvazione. La chiedo scusa, se la difesa del fratello mi fa differire la risposta alla sua seconda Scrittura. Ella ha tanto interesse per la memoria di lui, che ben volontieri concederà un benigno compatimento a chi si protesta col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma

Treviso 20. Feb. 1776

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco Malfatti. Ferrara.

Divot.mo Obbl.mo Ser.r V.o
Giordano Riccati

gente z Spianamento dell' area circolare, il cui raggio a, ed usata la sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, onde si abbia $z = a\sqrt{-1}\cdot\frac{t+a}{t-a}$, $dz$

261 [illegible] coltura [illegible]

[illegible]

un fatto d'importanza [illegible] agosto [illegible]

[illegible]

[illegible] III [illegible]

[illegible] non [illegible]

[illegible]

[illegible] approvazione [illegible]

[illegible]

[illegible]

2)

genta $z$ l'elemento dell'arco circolare, il cui raggio $a$, è usata la sostituzione $\frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, onde si abbia $z = a\sqrt{-1} \cdot \frac{t+a}{t-a}$, $dz$

Ill.$^{ma}$ Sig.$^{ra}$ Sig.$^{ra}$ P.rona Col.$^{ma}$

È giunto a Treviso il Tomo III. delle Efemeridi Letterarie di Roma dell'anno presente 1778. nel quale si inferiscono le Riflessioni analitiche del Sig.r Ab. Gioachino Pessuti sopra una Lettera scrittagli dall'Ab. Co. Vincenzo Riccati, ed inserita ultimamente nella nuova Raccolta di Opuscoli stampata in Venezia nell'anno scorso 1777. Si contentano gli Autori dell'Efemeridi, di accennare due cose, nelle quali maggiormente spicca il talento analitico del Sig. Ab. Pessuti. Tratterò in questa lettera soltanto della prima.

Non approva mio fratello la proporzione $\sqrt{-1} : \log.-1$ fra il diametro e la circonferenza circolare determinata da Giovanni Bernoulli. Per dimostrare lo sbaglio di questo celebre Geometra, comincia dalla formola $\frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$, che esprime per la tangente $z$ l'elemento dell'arco circolare, il cui raggio $= a$; ed usata la sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, onde si abbia $z = a\sqrt{-1}\cdot\frac{t+a}{t-a}$,

$dz$

$$dz = -\frac{2a^2\sqrt{-1}\cdot dt}{t-a^2},\ z^2+a^2 = -\frac{4a^3t}{t-a^2}$$

perviene alla formola $\frac{a\sqrt{-1}}{2}\cdot\frac{dt}{t}$, che integrata colli aggiunta della necessaria costante, supponendo = a la sottotangente, e il protonumero, ci dà l'arco circolare $=\frac{\sqrt{-1}}{2}\log.-t=\frac{\sqrt{-1}}{2}\log.-a.\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ $=\frac{\sqrt{-1}}{2}\log.-a.\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}+\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$, moltiplicando e dividendo per $z+a\sqrt{-1}$ la quantità $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$. Fatta la riflessione essere $-a.\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}+\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ certamente un numero immaginario, ne raccolga il Sig.r Abbassuti, che ~~seranno~~ rinseranno paralogistici i suoi calcoli, quando lo condurranno a conseguenze diverse. Intanto si cavi la conseguenza, che l'arco circolare si agguaglia al logaritmo di un numero immaginario moltiplicato per la grandezza immaginaria $\frac{\sqrt{-1}}{2}$. Ora se il detto logaritmo fosse reale, ne risulterebbe immaginario l'arco di cerchio; e perciò essendo questo reale, egli è necessario che sia immaginario il logaritmo del numero immaginario; qualmente

acciocchè alla tangente z = 0 si riferisca l'arco altresì = 0

qualmente asserisca li Ab: Riccati; dimodochè il prodotto $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ log. $-1$ somministri un arco reale di cerchio.

Se pongasi $z = a$, si avrà il semiquadrante $= \frac{\sqrt{-1}}{2}$ log. $-a \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$, e moltiplicando per 4, si avrà la circonferenza $= 4\sqrt{-1}$ log. $-a \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$.

E qui il Sig.r Dassier crede di avere scoperto il paralogismo commesso da mio fratello, mentre si oppone alla proporzione stabilita dal Bernoulli fra il diametro e la circonferenza circolare. Se si fosse avveduto, dic'egli, essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, avrebbe trovato la nominata circonferenza $= 4\sqrt{-1}$ log. $-a\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} \cdot 2$ log. $-a\sqrt{-1}$ $= 2\sqrt{-1}$ log. $-a$. Per la qual cosa il diametro alla circonferenza stava come $a : \sqrt{-1}$ log. $-a$, o sia come $a\sqrt{-1} : -$log. $-a$, e ponendo $a=1$, come $\sqrt{-1} : -$log. $-1$: ma $-$log. $-1 =$ log. $\frac{1}{-1} =$ log. $-1$; dunque il diametro alla circonferenza come $\sqrt{-1}$ : log. $-1$ giusto a quanto ha determinato il Bernoulli.

La maniera con cui li Ab. Vincenzo nella sua Lettera esamina il giro del calcolo, che ha condotto il

il Bernoulli ad una falsa conclu=
sione; dovea illuminare il Sig.r
Passuti. Abbiamo veduto, che
essere deve immaginario il valore
di $-t$, e trovandolo egli reale,
ed $=-ac$, dovea ciò metterlo in
guardia di essere incorso in para=
logismo. L'aggiunta del nulla
moltiplicato in $\sqrt{-1}$ rende una
quantità immaginaria, verità
non avvertita dal Sig.r Du Gua
che perciò cadde in errore sic-
come notarono il Cramer, ed
altri.

Prendiamo per mano la formola
$\frac{\sqrt{-1}}{2}\log.-a\cdot\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}+\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$, che
quando ~~z=a [illegible]~~
~~[illegible]~~
~~[illegible]~~ $\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}=\frac{0}{a}$,
~~[illegible]~~ $\frac{z^2-a^2}{z^2+a^2}=\frac{0}{a}$.
~~[illegible]~~ si ugua=
glia ad un semiquadrante, che
io esprimo per $\frac{c}{4}$, dimodochè ~~[illegible]~~
ne risulta ~~avremo~~ $\frac{c}{4}=\frac{\sqrt{-1}}{2}\log.-a\sqrt{-1}+0$,
e per conseguenza $c=4\sqrt{-1}\log.-a\sqrt{-1}$.
Se non procedo avanti col calcolo,
io posso tralasciare il nulla, per=
chè non è moltiplicato per $\sqrt{-1}$
onde sia $c=4.\sqrt{-1}\log.-a\sqrt{-1}$, e
giacchè

giacchè l'equazione mi si presentò, suppliva il Sig.r Ab. a riflettere, che avea mio fratello si era accorto essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, quanto che la sua formola la guida nel caso di $x = a$, all'espressione $\frac{c}{4r} = \frac{\sqrt{-1}}{a} \log. -a\sqrt{-1}$. $r = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$

Ora se voglio continuare il computo, e segnando l'equazione nel modo seguente $c = r\sqrt{-1} \cdot r \log. -a\sqrt{-1} + 0$, mi accingo a trovare il logaritmo, a cui si eguaglia $r \log. -a\sqrt{-1} + 0$, non mi è certamente permesso di negligentare il nulla; perchè trascurandolo, si ommetterebbe nel logaritmo, che ne risulta, il nulla moltiplicato in $\sqrt{-1}$, ed il numero di un tal logaritmo non sarebbe immaginario contro a ciò, che abbiamo stabilito di sopra. Facciasi dunque $a : -a\sqrt{-1}+0 :: -a\sqrt{-1}+0 : -a+0\cdot 2\sqrt{-1}$, ed il quarto termine esprimerà il numero cercato, onde si abbia $c = 2\sqrt{-1} \cdot \log. -a+0\cdot 2\sqrt{-1}$. Sarà pertanto la vera proporzione fra il diametro e la circonferenza circolare come $a : \sqrt{-1} \log. -a+0\cdot 2\sqrt{-1}$, o sia ponendo $a$

$a = 1$, come $\pi = \sqrt{-1} \log. \overline{-1 + 0.2\sqrt{-1}}$ ∴ $\pi\sqrt{-1} = \log. \overline{-1 + 0.2\sqrt{-1}}$. In tal guisa sarà immaginario il numero $-1 + 0.2\sqrt{-1}$ non meno che il suo logaritmo, il quale moltiplicato in $\sqrt{-1}$ diviene una quantità reale, che sappiamo aguagliarsi a $\frac{c}{2a}$.

Poichè $c = 2\sqrt{-1} \log. \overline{-a + 0.2\sqrt{-1}}$, avremo $\frac{c}{4} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. \overline{-a + 0.2\sqrt{-1}}$, e l'omogeneo di comparazione dinoterà il quadrante di cerchio. Corrispondendo ad esso la tangente $z = -\infty$, la formola generale prenderà il seguente aspetto $= \frac{\sqrt{-1}}{2} . \log. -a . \overline{1 + \frac{2\sqrt{-1}}{-\infty}} \times a$; ponendo $-\infty = \frac{-a}{0}$, tornerà ma a trovare la sovra posta espressione $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. \overline{-a + 0.2\sqrt{-1}}$.

Continuo il cammino, ed essendo $c = \sqrt{-1} . 2\log. \overline{-a + 0.2\sqrt{-1}}$, trovo $2 \log. \overline{-a + 0.2\sqrt{-1}} = \log. \overline{a + 0\sqrt{-1}}$ e per conseguenza $c = \sqrt{-1} \log. \overline{a + 0\sqrt{-1}}$, o sia $\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. \overline{a + 0\sqrt{-1}}$, valore della semicirconferenza circolare.

Abbiamo il semicircolo, quando la tangente ~~negativa~~ torna a divenire $= 0$. Nella formola generale si ponga $z = 0$, ~~[illegible]~~, e ci si

e ci si presenterà l'espressione già ritrovata dal semicircolo $\frac{c}{r} = \frac{\sqrt{-1}}{r} \log. \overline{a+o\sqrt{-1}}$.

L'arco nullo, in riguardo a cui altresì $z=o$, vien dinotato dalla medesima formola $\frac{\sqrt{-1}}{r} . \log. \overline{a-o\sqrt{-1}}$. In questo caso $\log. \overline{a-o\sqrt{-1}} = -o\sqrt{-1}$, e perciò l'arco $= \frac{\sqrt{-1}}{r} . -o\sqrt{-1} = o$. Se anche nell'equazione $\frac{c}{r} = \frac{\sqrt{-1}}{r} \log. \overline{a+o\sqrt{-1}}$ quando spetta al semicircolo supponessi non rettamente $o\sqrt{-1}$ quantità minima relativamente ad $a$, sarebbe $\log. \overline{a+o\sqrt{-1}} = o\sqrt{-1}$ e l'arco di cerchio si troverebbe $\frac{\sqrt{-1}}{r} . -o\sqrt{-1} = +o$: ma nella detta circostanza l'arco $= \frac{c}{r}$; Dunque $o\sqrt{-1}$ non è quantità minima, ma tale che $\log. \overline{a+o\sqrt{-1}}$ si basisi uguagli a $-c\sqrt{-1}$, onde moltiplicato per $\frac{\sqrt{-1}}{r}$, ne risulti l'arco $= \frac{c}{r}$.

Dalla formola $\frac{c}{r} = \frac{\sqrt{-1}}{r} \log. \overline{a+o\sqrt{-1}}$ ne deriva questa altra $\frac{c}{\sqrt{-1} . r \log. \overline{a+o\sqrt{-1}}} = \frac{\sqrt{-1}}{r} \log. \overline{a+o\sqrt{-1}}$, che è la stessa espressione, che si è ritrovata per l'arco = al semicircolo, e che si troverebbe per 3, 4, 5, 6 &c. semicircoli. Poichè $\log. \overline{a+o\sqrt{-1}} = nc\sqrt{-1}$, e conseguentemente gli archi, che hanno la

che tangente = 0, vengono dinotati dalla formola $\frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot -nc\sqrt{-1} = \frac{nc}{2}$, in cui ad n possono competere i valori 0, 1, 2, 3, 4 &c.

La stessa espressione altresì si adatta a tutti gli archi, che hanno la tangente comune, e tali sono per esempio il semiquadrante, il semiquadrante più il semicircolo, il semiquadrante più due semicircoli &c. Il semiquadrante si esprime per $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a\sqrt{-1}$, il semicircolo per $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. a+o\sqrt{-1}$; dunque il semiquadrante più il mezzo cerchio si agguaglierà a $\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\log. -a\sqrt{-1} + \log. a+o\sqrt{-1}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a\sqrt{-1}$; il perchè espressione competente anche al semiquadrante, ed agli altri archi, che hanno la tangente. Il perchè generalmente $z = a$, $\log. -a\sqrt{-1} = -\frac{nc}{4}\sqrt{-1}$, e quindi $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot -\frac{nc}{4}\sqrt{-1} = \frac{nc}{8}$, potendosi ad n assegnare i valori 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49 &c.

Ritornando frattanto al Sig. Ab. Rassuti, suppone

suppone egli la periferia circola-
re $= \sqrt{-1} \cdot a \log. -a$ : ma $a \log. -a$
$= \log. a$ ; dunque $c = \sqrt{-1} . \log. a$.
Nella logistica, in cui la sotto=
tangente, ed il protonnumero si
agguagliano ad $a$, al logaritmo
$h$ corrisponda il numero $g$,
e poichè $\frac{c}{\sqrt{-1}} = \log. a$, si avrà
l'equazione $a\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{c}{\sqrt{-1} \cdot h}} = a$, o sia $\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{c}{\sqrt{-1} \cdot h}} = 1$,
la quale dimostra quanto sia
assurda la sentenza sostenuta
dal nostro Sig.r AG. Imperocchè
che essendo $a, c, g, h$ tutte
quantità reali, egli è impos=
sibile, che la grandezza reale
$\left(\frac{g}{a}\right)$ alzata ad una potestà im=
maginaria pareggi l'unità.
Non così succede ammessa la vera
equazione $\frac{c}{\sqrt{-1}} = \log. \overline{a - o\sqrt{-1}}$,
da cui ne nasce questa altra
$a\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{c}{\sqrt{-1} \cdot h}} = a - o\sqrt{-1}$, ovvero
l'equivalente $\left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{c}{\sqrt{-1} \cdot h}} = \frac{a - o\sqrt{-1}}{a}$,
la quale ci mostra a dito, che
la potestà immaginaria di
una quantità reale si agguaglia
com'è dovere ad una grandez=
za immaginaria. Sembrami
che questa riflessione finisca
di mettere in chiaro il paralo=
gismo del Bernoulli addottato
dal

[illegible]

Ill.mo Sig. Sig. Prone Col.mo

41

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 3?

riguardo al Sig. [illegible] diceva, essere $dy = \ldots$

[illegible] generalmente, ma bensì rispetto [illegible]

nell'equazione [illegible] $dx = dy$ [illegible] richiedendo

la natura della logaritmica [illegible]

[illegible] fra le due ordinate $dy$, [illegible]

la prima delle quali [illegible] alla seconda in pro-

porzione maggiore di qualunque data [illegible]

alla mia poca [illegible] quanto mi [illegible] da

pensare il Sig. [illegible] che

nella formula [illegible] = Area Rag. e Tang. [illegible]

– Area Rag. e Tang. [illegible] integrazione [illegible]

è sempre positiva, [illegible] differenza

dover esser tale [illegible] comparazione,

il che necessariamente richiede, che nel destro

caso si considerino come positivi gli archi, che si

riferiscono alla tangente da principio negativa.

E poiché gli archi [illegible] alla tangente [illegible] posti-

[illegible] negativa, che si prendono [illegible] di

positivi, si agguagliano agli archi positivi,

che corrispondono [illegible] tangente, che nella

loro origine son positive; [illegible] posso

[illegible] dalla formula [illegible] = [illegible]

Area Rag. e Tang. [illegible] Area Rag. e Tang. [illegible] perché

[illegible]

---

51

[illegible] l'

aver

qualunque

simo

le.

avrebbe

[illegible] alla

li, ed

immagina-

[illegible]

duce l'im-

[illegible]

immagi-

come

saranno

geometri-

unque

alla

[illegible] del

primi

ne'

propor-

nza può

[illegible] di

[illegible]

nciar

tivo,

nmagi-

ntinuate

definizio

mine

[illegible]

continua

[illegible] di no.

Perche

3 8

nella conseguenza si ricava da quello che l'analisi mi viene somministrata che la detta avvertenza sia sufficiente per soddisfare alla sua obbligazione

La settimana ventura le spedirò le osservazioni supplite, dovendosi il distributore collocarle ai loro luoghi, raccomandandole i miei complimenti allo stimatissimo Sig.r Ab. Lorgna.

Intanto le significo il compimento della scrittura che mi scrive, siccome io giudico, avrà presa dal Sig.r Ab. Rassuti, mentre accusa mio fratello di paralogismo. Penso di aggiungere qualche cosa intorno ai logaritmi dei numeri negativi, in riguardo ai quali il Sig. Rassuti si attiene all'opinione dell'Eulero che certamente è falsa. Su questa materia tengo sei lettere dell'Ab. Vincenzo, alle quali io ho aggiunta una, che fa apertamente vedere, che ad ogni logaritmo reale corrispondono due quantità, una positiva, e l'altra negativa.

La protesto mille obbligazioni per l'incomodo che si prende esaminando la mia Dissertazione, ed offerendomi

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo



39

osservandomi ai suoi comandi, con rispettosa cordiale stima mi dichiaro

Di V. S. Illma

Treviso 23. Febo 1778

Illmo Sig. Gianfrancesco Malfatti Ferrara.

Divmo Obblmo Servo Vero
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

Mi è riuscito finalm.e di avere, ma non da Livorno, il libro del S.r ab.te Paoletti: non ho potuto ben ponderarlo per mancanza di tempo. A quel poco però, che me n'è passato sotto, vedo, che non determina la costante nella integrazione, forse per far vedere di evitare il paralogismo, nel quale bisogna incorrere col dover fare $2\sqrt{-1}=0$. Egli per tal guisa rende immaginario il principio dell'arco circolare, e della tangente s'io non m'inganno, e per conseguenza tutto l'arco, e tutta la tangente. Dico questo, che scorrendo così alla sfuggita il libro nel luogo dove tratta della proporz.e fra il diametro, ed il circolo, me n'è sembrato. Ella vedrà, se mi sono ingannato. Le mando pertanto il d.o libro, onde possa aver campo di far compitamente quegli esami ch'ella m'accenna di aver cominciati della proposta questione. Godrò di sapere poi da V.S. Ill.ma qualche cosa, e ben volentieri a lei debbo rimettere la difesa su quanto ha scritto il S.r Co: Vincenzo, e lo debbo per ogni titolo. Aveva pensato di scriver io qualche cosa, quando nessuno si fosse mosso. Gradisca intanto il buon animo, e sono con pieno ossequio

Di V.S. Ill.ma

Roma 4 Marzo 1778

Um.o, ed Obb.mo Se.re
Petronio M.a Caldani

Due neg...
altro negativo.
Mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi consideri quale mi dichiaro Di V.S. Ill.ma
Treviso 8 Marzo 1774 Divot.mo Obbl.mo Ser.e V.o
Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti Giordano Riccati

riò l'
i avere
ualunque
nimo
ne.
iarebbe
z mi alla
lli, ed
mmagina-
inanzo
duce l'im-
g. 41,
immagi-

come
saranno
geometri-
unque
della
ià del
e primi
, ne'
propor-
nza può
pia di
narj
nciare
tivo,
mmagi-
ntinuate
definizio
mine

ma ug-
altro negativo.
Mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi
consideri quale mi dichiaro Di V. S. Ill.ma
Treviso 8 Marzo 1773 Divot.mo Obbl.mo Ser.e V.o
Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti Giordano Riccati

rm rapper-
o continua,
ciò di no.
Perchè

Mutazioni da farsi nella Dissertazione
del Signor Dottor ... IXX^mo ...

Il num.ro X. si principj così:

X. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A $y = 0$, abbiamo $dx = \frac{dy}{?}$ 2dx: ma nella logistica la ragione maggiore di qua:

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Colmo 

Invio le promesse correzioni, che sono il frutto del dottissimo, ed accuratissimo esame, che ella per favorirmi ha fatto della mia Dissertazione. Sperarei, che in tal guisa ogni cosa fosse ridotta a dovere, e la sua approvazione mi leverà qualunque dubbietà.

Non mi è ancora pervenuta la Operetta del Sig.r Ab. Passuti stampata in Livorno, che averei molto piacere, che ancor ella vedesse, e considerasse ben bene. Il suo carattere decisivo spicca paramente leggendo l'estratto da lui disteso delle Istituzioni Analitiche di mio Fratello. Un Giornalista dovrebbe riferire, e non pronunciare sentenza con tanta franchezza. In proposito della proporzione fra il diametro, e la circonferenza circolare egli prende certamente sbaglio, mentre difende il Bernoulli; e s'inganna parimente negando, che ad un qualsivoglia logaritmo reale si riferiscano due uguali numeri reali, uno positivo, e l'altro negativo.

Mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi consideri quale mi dichiaro Di V.S. Ill.ma

Treviso 8 Marzo 1773 Divot.mo Obbl.mo Ser.e V.o

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti — Giordano Riccati



rai ... f'
nzai aver
, qualunque
ontissimo
zione.
o sarebbe
l diam.o alla
roulli; ed
ò immagina-
o Vincenzo
introduce l'im-
i log.i ,
sità immagi-
...
re, come
vi saranno
ias geometri-
qualunque
iò nella
rissima del
i due primi
che nei
ia propor-
guenza può
coppia di
aginarj
cominciar
egativo,
e immagi-
. Continuate
r, la definizio
termine
tmi ragguer-
o continua
ero di no.
Perche

Mutazioni da farsi nella Dissertazione

del Suono falso [illegible] XX[illegible]

Il num.ro X si principj così [illegible]

X. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A $y = 0$, abbiamo $dx = \frac{dy}{y} = 2dx$: ma nella logistica la ragione maggiore di qua[illegible]



[illegible] l'
[illegible] aver
[illegible] qualunque
[illegible]ntissimo
[illegible]zione:
[illegible] sarebbe
[illegible] diam.o alla
[illegible]ulli; ed
[illegible] immagina-
[illegible] Vincenzo
[illegible]ntroduce l'im-
[illegible] log. -1,
[illegible]ità immagi-
[illegible]re, come
[illegible] saranno
[illegible] geometri
qualunque
[illegible] nella
[illegible]rissima del
[illegible] due primi
[illegible] che ne
[illegible] propor-
[illegible]guenza può
[illegible] coppia di
[illegible]aginarj
cominciar
[illegible]egativo,
[illegible] immagi-
[illegible]. Continuate
[illegible] la definizio
[illegible] termine
[illegible]mi rapper-
[illegible] continua
[illegible] di no.
ro Perche

Mutazioni da farsi nella Dissertazione del Suono Tolsi. XXX

Il num.ro X si principj così

X. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A $y = 0$, abbiamo $dx = \frac{dy}{z} = zdx$: ma nella logistica la ragione maggiore di qualunque data fra l'ordinata $= dy$, e l'ordinata $= 0$ esige esige che sia la intercetta $dx \pm \infty$; dunque sarà parimente $z\,dx$, e molto più $z = \infty$. La formola $H + x = g$ m'insegna &c.

La fig.a 2. si cangi nel modo seguente:

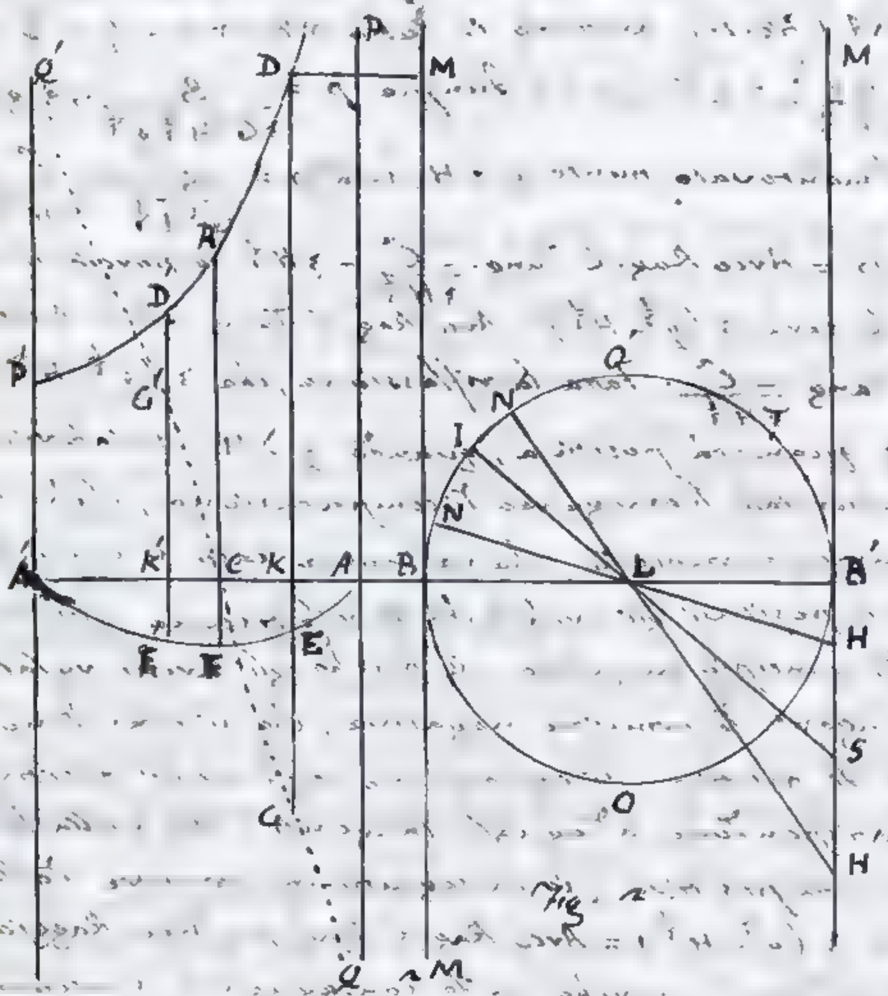



Fig. 2

Di Vs Ill.ma

Dev.mo Obblig.mo Ubbid.mo Ser.e Vero
G. Franc.o de' Malfatti

51

rai ... f'
... aver
... qualunque
... ntissimo
... zione.
... sarebbe
... diam.i alla
... oulli ; ed
... immagina-
... Vincenzo
... introduce l'im-
... log. −1,
... tità immagi-

... re, come
... vi saranno
... ai geometri
... qualunque
... nella
... rissima del
... i due primi
... che ne'
... a propor-
... guenza può
... coppia di
... aginarj
... cominciar
... egativo,
... e immagi-
... Continuate
... la definizio
... termine

... mi rappre-
... a continua
... ero di no.
Perchè

Il num.ro XXI. si finisca nella sottoscritta maniera o sia all'equivalenza $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{-dp}{G^2H^{\frac{4}{3}}p^2+1}$ quale puo prendersi altresì in aspetto seguente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} \cdot -dp}{\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}}+p^2}$.

Pongasi $\frac{g}{G^2H^{\frac{4}{3}}} = C^2$ (30.), ed integrando mi si presenta $A + 3q^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. $-p$.

XXII. Determineremo il valore della costante A riflettendo, che dovendo essere pel num.ro X. $z = \infty$ nel punto A (fig. 1.), avremo in detto sito $v = -\frac{1}{2} = 0$: ma $v = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2H^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ (29.); dunque $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, e giacchè nel mentovato punto $q = H$, sarà $p = \frac{g}{3G^2H^{\frac{5}{3}}} = \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$.

Quindi $A =$ Arco Rag. C Tang. $-\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} - 3H^{\frac{1}{3}}$, e perciò il vero integrale sarà $3\cdot(q^{\frac{1}{3}}-H^{\frac{1}{3}}) =$ Arco Rag. C Tang. $-p$ − Arco Rag. C Tang. $-\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Fatta la riflessione, che $3\cdot(q^{\frac{1}{3}}-H^{\frac{1}{3}})$ è sempre quantità positiva, quando $q > H$, s'inferisca dover esser tale l'omogeneo di comparazione, il che necessariamente richiede, che nel nostro caso si considerino come positivi gli archi, che si riferiscono alle tangenti da principio negative. E perchè gli archi relativi alle tangenti da principio negative, che si prendono in qualità di positivi, si agguagliano agli archi positivi, che corrispondono ad eguali tangenti, che nella loro origine son positive; io in seguito mi servirò della formola $3\cdot(q^{\frac{1}{3}}-H^{\frac{1}{3}}) =$ Arco Rag. C Tang. $p$ − Arco Raggio C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ (31.); perchè nella conseguenza si accorda

con

con quella, che dalle analisi mi viene somministrata

Passo a stabilire la grandezza &c.

Il num.° XXXII. si cangi così.

XXXII. Mentre due corde triangolari simili $CL$ e $L$, create della stessa materia, e crassizie, e tese dalla medesima somma di forza si vibrano, essendo divise in pari numero di parti, deggiono adattarsi a curve della stessa natura, e possono certamente a curve simili accomodarsi. Nella formola generale spettante alle corde inegualmente grosse $-\frac{aVPddy}{My} = 4q \cdot dq$ si sostituisca $\frac{GL}{2}$ in cambio di $V$, $\frac{Gq}{L}$ in cambio di $4q$, onde ne risulti $-\frac{aLPddy}{My} = q\frac{dq}{L}$, o sia $-\frac{ddy}{y} = \frac{2Mqdq}{aL^2P}$. La curva, in cui si ripiega la corda $CLaL$, sia espressa dalla formola $-\frac{ddy}{y} = \frac{2mqdq}{al^2p}$. Mi insegna questa, che la quantità $-\frac{ddy}{y}$ sarà costante, qualunque valore abbia $y$ nell'atto che la $q$, e $dq$, qualunque valore, la corda si vibra. Un'altra corda triangolare simile $CenC$, ugualmente densa e grossa, e tesa dallo stesso peso mi chiederà l'equazione $-\frac{ddY}{Y} = \frac{2MQdQ}{AL^2P}$, in cui parimente si verificherà, che supposte costanti $Q$, e $dQ$, sia altresì costante $-\frac{ddY}{Y}$, assegnata a $Y$ dentro i limiti della quantità minima qualsivoglia grandezza. Si stabilisca $q : Q :: dq : dQ :: l : L$, e poiché $m : M :: l^2 : L^2$ avremo $\frac{ddy}{y} : \frac{ddY}{Y} :: \frac{l^3}{a} : \frac{L^3}{A}$. Se le corde si adattino adunque a curve simili, sarà $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, e per conseguenza $\frac{l^3}{a} = \frac{L^3}{A}$, e passando all'analogia $a : A :: l^3 : L^3$, cioè a dire i valori delle costanti $a$, $A$ come i cubi delle

lunghezze

Di V. S. Illma

Devmo Obligmo Obbidmo Ser. Vero
G. Franco de' Malfatti



mai più l'
nzi aver
, qualunque
ontissimo
zione.
o sarebbe
l diam.i alla
tvolli, ed
e immagina-
e Vincenzo
ntroduce l'im
i log. -1,
ità immagi-

re, come
vi saranno
ua geometri-
qualunque
so nella
rissima del
i due primi
che ne'
ua propor-
guenza può
coppia di
aginarj
cominciar
egativo,
e immagi-
. Continuate
, la definizio
termine

tmi rappre-
a continua
lero di no.
Perche

lunghezza CK, CA. Ora la grandezza di $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$ non si muta al cangiarsi della ordinate $y$, $Y$ mentre si vibrano le corde; dunque sarà sempre $\frac{ddy}{y} = \frac{ddY}{Y}$, ed $a : A :: l^3 : L^3$. Ed ecco messa in vista una bella proprietà delle corde simili, che ad assisse proporzionali alle lunghezze corrisponda sempre la quantità costante $\frac{ddy}{y}$, qualunque sia la grandezza delle ordinate $y$ relative alle delle assisse. E conciossiachè per la formola (I.) $t = \frac{k\sqrt{a}}{\sqrt{l}}$, ne segue che i tempi delle vibrazioni analoghe delle corde CLaL, CLna si riferiranno come $l^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$ cioè come le radici quadrate dei cubi delle lunghezze CK, CA.

Ciò dimostrato, sia CLaL la prima delle parti infinitesime, ed unisona nelle quali &c.

Nel num.ro XXXVIII. si faccia la seguente mutazione dopo le parole delle corde predette.

Dal numero V. raccogliesi, che le curve, in cui si ripiegano le corde, sono espresse dalla equazione $\phi z dz^2 = -\frac{aVP\, ddy}{My}$; e giacchè nel nostro caso $\phi z = \frac{G^2 z^2}{L^2}$, avremo $\frac{G^2 z^2 dz^2}{L^2} = -\frac{aVP\, ddy}{My}$, e perciò $-\frac{ddy}{y} = \frac{MG^2 z^2 dz^2}{aL^2 VP}$. Preso ora nelle corde simili le assisse $z$, ed i loro elementi $dz$ proporzionali alle lunghezze $L$, rimarrà per il numero XXXII. essere costante il valore di $\frac{ddy}{y}$. Il perchè sendo $G^2$ come $L^2$, $z^2 dz^2$ come $L^4$ &c.

orizzontal

nai . più l'
nza aver
, qualunque
ontinuo
zione.
so sarebbe
l diam.o alla
risulti, ed
o immagina-
e Vincenzo
introduce l'im.
di log.mi,
sità immagi-

ire, come
vi saranno
nai geometri
qualunque
so nella
rissima del
i due primi
che ne'
za propor-
guenza può
coppia di
aginarj
cominciar
legativo,
e immagi-
. Continuate
y, la definizio
termine

tmi rappre-
a continua,
eio di no.
Perchè

Di V. S. Ill.ma

terrum -

Dev.mo Obblig.mo Ubbid.mo Ser.e Vero
G. Franc.o de' Malfatti

nai più l'
nza aver
, qualunque
ontissimo
zione.
o sarebbe
l diam.º alla
ulti, ed
e immagina-
e Vincenzo
introduce l'im
li log.ᵐⁱ,
ità immagi-

re, come
vi saranno
uai geometri
qualunque
o nella
issima del
i due primi
che ne'
a propor-
guenza può
coppia di
aginarj
cominciar
egativo,
e immagi-
. Continuate
, la definizio
termine

mi rappre-
a continua
ciò di no.
Perche

Di V.S. Ill.ma

Ferrara

Dev.mo Obblig.mo Ubbid.mo Ser. Vero
G. Franc.o de' Malfatti

Nella quistione, che era prima tra il Leibniz, e il Bernoulli, e dopo tra l'
Eulero, e l'Alembert, sui logaritmi delle quantità negative, io entro senza aver
letto niente nè per l'una parte, nè per l'altra. Esporrò nondimeno qualunque
essi sieno, i miei pensamenti, che sottopongo al savio di lei giudizio, prontissimo
a rinunziarvi tosto che della loro fallacia mi si presenti una dimostrazione.
... in tal caso sarebbe

Ill.mo Sig.r Conte Pron. Stimo

Ella sa, che i Mattematici debbono essere sinceri, e che non cedono fuorchè alla dimostrazione. Dagli annessi fogli vedrà, che io penso diversamente e da lei, e dagli altri sul proposito de' logaritmi. Mi protesto però di non aver letto niente delle ragioni che si adducono e per l'uno e per l'altro partito. Il che mi fa temere di aver ragione. Tuttavia, se non varranno le cose che ho scritto, come argomenti per stabilire una verità, varranno almeno come obbiezioni contro una verità stabilita, la quale, quando avrò un po' d'ozio, farò che a me pure sia nota. Intanto Ella non si dee far caso del tuono decisivo, che uso in questi fogli, perchè è proprio di chiunque vuol sostenere con forza un'opinione. Tornerà rimesso e umile al fulgore d'una dimostrazione in contrario, della quale ~~fino ad ora mi~~ manca. Forse non avrò occasione di leggere il libro del Penuti, e perchè di tai merci qui si scarseggia, e perchè il pedantismo di questa università che occupa, e strozza i lettori, mi lascia appena tempo di respirare. Quando ella lo avrà letto, e le piaccia di farmene una stretta analisi, la leggerò volentieri. Non si ributti per le mie importune repliche sui due paragrafi della sua dissertazione, ed accetti queste pure colla stessa bontà, colla quale ha onorato il restante delle mie riflessioni. Si assicuri che saranno poste a lor luogo i passi mandatimi, e pregandola a continuarmi la sua buona grazia, che io pregio moltissimo, con vero rispetto. e distintissima stima mi confermo

Ferrara li 10 Marzo 1778

Di V.S. Ill.ma

Dev.mo Oblig.mo Obbid.mo Ser.e Vero
G. Franc.o de' Malfatti

l diam.o alla
noulli, ed
le immagina-
re Vincenzo
introduce l'im-
di log. -1,
lità immagi-
are, come
vi saranno
ua geometri-
qualunque
go nella
rittima del
i due primi
, che ne
ua propor-
eguenza può
, coppia di
aginarj
cominciar
negativo,
e immagi-
. Continuate
la definizio
termine
mi rappre-
a continua,
ievo di no.
Perche

50

Della quistione, che era prima tra il Leibnitz, e il Bernoulli, e dopo tra l'
Eulero, e l'Alembert, sui logaritmi delle quantità negative, io entro senza aver
letto niente nè per l'una parte, nè per l'altra. Esporrò nondimeno, qualunque
essi sieno, i miei pensamenti, che sottopongo al savio di lei giudizio, prontissimo
a rinunziarvi tosto che della loro fallacia mi si presenti una dimostrazione.
Se non m'inganno, il Bernoulli vuole tai logaritmi reali; e in tal caso sarebbe
manifesta la sua contraddizione, quando stabilisce la proporzione del diam. alla
circonferenza :: $\sqrt{-1}$ . l-1. L'Ab. Pessuti rifiuta l'opinione del Bernoulli, ed
accetta la proporzione sud.a, aderendo però al Leibnizio, che vuole immagina-
rj i logaritmi delle quantità negative. Il sommo Geometra fu Conte Vincenzo
di Lei fratello attaccato dal Pessuti sta per la realità di essi; e introduce l'im-
maginario nel secondo conseguente dell'analogia, scrivendo in vece di log. -1,
log. $\overline{-1+0\sqrt{-1}}$ assicurando che $0\sqrt{-1}$ non è zero, ma bensì una quantità immagi-
naria erroneamente trascurata dal Pessuti.
Per dir qualche cosa su questa controversia, sarà forse utile il considerare, come
sia nata ne' Geometri l'idea de' logaritmi. Hanno essi detto. Se vi saranno
due serie, una delle quali sia composta di termini in continua geometri-
ca proporzione, l'altra di termini in continua aritmetica, qualunque
termine di questa si chiamerà il logaritmo del termine analogo nella
prima. Questa definizione mi fa avere una nozione chiarissima del
logaritmo, e mi lascia nello stesso tempo in libertà di fissare i due primi
termini di amendue le serie a mio piacimento, bastando solo, che ne'
susseguenti io adempia la condizione prescrittami della continua propor-
zionalità sì geometrica, che aritmetica. Nessuna per conseguenza può
aver diritto di vietarmi, che io faccia corrispondere alla prima coppia di
termini reali della prima serie o due termini reali, o immaginarj
nella seconda, ovvero al contrario. Mi deve esser lecito di cominciar
la prima con due termini, de' quali uno sia positivo, l'altro negativo,
uno reale, l'altro immaginario, tutti due negativi, tutti e due immagi-
narj, e di un tale arbitrio usar posso anche per la seconda. Continuate
quindi le serie a tenore delle date leggi, sarà sempre vero, per la definizio-
ne sud.a, che ogni termine della seconda sarà il logaritmo del termine
analogo nella prima.
Che se mi si domanda, se io potrò in tutti gl'ideati sistemi di logaritmi rappre-
sentare i termini della prima serie colle ordinate ad una curva continua
e reale, e quei della seconda colle corrispondenti ascisse, io risponderò di no.

Perche

Perchè qualunque volta uno di que' sistemi implicherà contraddizione colla realità delle ascisse, o delle ordinate atte a formare un continuo, ciò non sarà possibile; e dirò allora, che la curva a quel sistema corrispondente è immaginaria, sebbene io saprò esprimere coi simboli quelle quantità, che fan figura d'ordinate, e le altre che fan figura d'ascisse per questa tal curva.

Ciò premesso, chiamando al solito numeri le ordinate, e logaritmi le ascisse di queste curve, egli è certo, che, se i due primi numeri saranno reali e positivi, e di più positivi e reali i due logaritmi analoghi, noi potremo formare una curva vera e reale; ed essa sarà la logistica, la quale scorrerà tutta al dissopra dell'asse, quando in tal parte si collochi la regione dei num.i positivi. Parimente, ove i due primi num.i siano reali ma negativi, e reali i due primi logaritmi, risulterà ancora la logistica, la quale avrà però tutto il suo andamento al di sotto dell'asse. Quindi non sarà vero ciò che dice l'Alembert nell'Enciclopedia Franzese della realità ed eguaglianza de' due logaritmi di $\sqrt{y}$, e di $-\sqrt{y}$, qualunque sia l'ipotesi de' due primi numeri $1, y$ costituenti la base del sistema. Se questi son positivi, non è reale altro che il log.o di $\sqrt{y}$, e immaginario quello di $-\sqrt{y}$, perchè la supposizione de' due primi numeri positivi determina la curva a star tutta sopra dell'asse. Ma siccome il prodotto $y$, da cui si estrae la radice può nascere sì dalla moltiplicazione de' due positivi $1, y$, come anche dalla moltiplicazione de' due negativi $-1, -y$, l'estrazione della radice deve comprendere tutti e due questi casi; e se ha luogo il secondo, cosicchè la logistica scorra sotto dell'asse, diventa reale il log.o di $-\sqrt{y}$, e si fa immaginario quello di $\sqrt{y}$. Tutto dunque dipende dalla posizione de' due primi numeri, la quale molte volte può essere arbitraria: Ma una volta che si sia fissata non è più lecito di considerare come reale altro che uno de' due logaritmi di $\pm\sqrt{y}$. Che se la natura del Problema esigerà che abbiano luogo tutte due le ipotesi, il che può succedere, quando una equazione abbia due radici reali, vuol dire, che richiedendo il Problema due logaritmiche una al dissopra, l'altra al dissotto dell'asse, potranno in tal caso [illegible] reali tutti due i logaritmi sud.i, sebbene considerata la cosa generalmente e in se, uno d'essi debba essere immaginario.

Deriva dal § precedente come Corollario, che, posti i due primi num.i di un sistema, uno positivo, e l'altro negativo, per esempio $1, -y$, cui corrispondano due logaritmi reali, non potremo con una curva reale rappresentare

il rapp

il rapporto de' numeri ai loro logaritmi. Perchè, essendo immaginarie tutte le medie proporzionali, che si esprimono con radici di indice pari, tra 1, e $-y$, siccome anche immaginarie tutte le altre simili medie tra qualunque due numeri prossimi della serie continuata, sarà impossibile una curva reale, che esprima col suo corso continuo sì fatte relazioni.

Accostandoci ora un po' più al nodo della questione tra lei e l'Ab. Pessuti, si stabilisca questa serie di num. parte reali, e parte immaginarj, ma continuamente proporzionali $a, -t\sqrt{-1}, -\frac{t^2}{a}, \frac{t^3\sqrt{-1}}{a^2}, \frac{t^4}{a^3}$ &c. cui corrisponde quest'altra serie di logaritmi $\frac{0}{\sqrt{-1}}, \frac{2A}{\sqrt{-1}}, \frac{4A}{\sqrt{-1}}, \frac{6A}{\sqrt{-1}}, \frac{8A}{\sqrt{-1}}$ &c. Non v'ha alcun dubbio, che sia $\log. a = \frac{0}{\sqrt{-1}}$; $\log. -t\sqrt{-1} = \frac{2A}{\sqrt{-1}}$; $\log. -\frac{t^2}{a} = \frac{4A}{\sqrt{-1}}$ &c, e qui si può fare la riflessione, che il logº. immaginario $\frac{2A}{\sqrt{-1}}$ corrisponde al numº. immaginario $-t\sqrt{-1}$, e che il doppio dello stesso logº. immaginario, cioè $\frac{4A}{\sqrt{-1}}$ è analogo al numº. reale $-\frac{t^2}{a}$; nè questo deve dare alcun fastidio, perche è una conseguenza necessaria dello stabilito sistema.

Avanzando il passo, prendo in mano la formola $\frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$ dell'arco circolare riferito alla tangente $z$, e al raggio $a$. E poiche $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ è quantità in se immaginaria, faccio $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t\sqrt{-1}}{a}$, intendendo col simbolo $t$ una quantità reale. Compiute le necessarie operazioni, e chiamato $A$ l'arco variabile del cerchio, sarà $dA = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \times \frac{dt}{t}$; e quindi integrando coll'aggiunta della necessaria costante, purchè la sottangente, e il protonumero della logistica immaginaria sia $a$, avremo $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -t\sqrt{-1}$ ovvero $\frac{2A}{\sqrt{-1}} = \log. -t\sqrt{-1}$: la quale equazione non vuol dir altro, se non che qualora si voglia rappresentare l'arco circolare con un sistema di logaritmi, conviene abbracciare quel medesimo, che abbiamo notato nel §. antecedente.

Nell'ipotesi di $z = a$, l'arco si fa eguale al semiquadrante, cioè $A = \frac{c}{8}$, significando $c$ la circonferenza intera del cerchio. Ma quando $z = a$, si fa parimente $t = a$. Dunque colla sostituzione di questi valori nella superiore equazione, avremo $\frac{c}{4\sqrt{-1}} = \log. -a\sqrt{-1}$, ovvero $c = 4\sqrt{-1} \log. -a\sqrt{-1} = \sqrt{-1} \log. a$.

Le due serie del penultimo §. nell'ipotesi di $A = \frac{c}{8}$, e di $t = a$ si modificano così

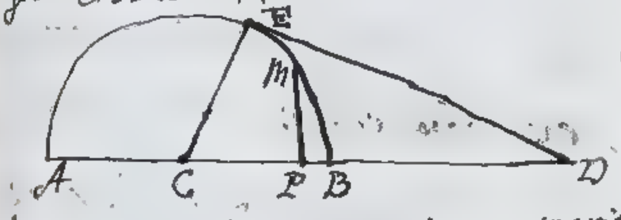
. . $a$, $-a\sqrt{-1}$, $-a$, $a\sqrt{-1}$, $a$ &c

$\frac{0}{\sqrt{-1}}$, $\frac{c}{4\sqrt{-1}}$, $\frac{c}{2\sqrt{-1}}$, $\frac{3c}{4\sqrt{-1}}$, $\frac{c}{\sqrt{-1}}$ &c; e qui rifletteremo, che non solo
$\log.a = \frac{0}{\sqrt{-1}}$, ma ancora $\log.a = \frac{c}{\sqrt{-1}}$, anzi andando innanzi colle due se[rie]
troveremo eziandio $\log.a = \frac{nc}{\sqrt{-1}}$, esprimendo $n$ qualunque numero della s[erie]
de' naturali 0, 1, 2, 3, 4 &c., il che confronta con ciò che si sa d'altron[de]
perchè la tangente zero serve per l'arco zero, e per qualunque numero
di circonferenze. Ciò posto, poichè tra i valori di log.a abbiamo anch[e]
questo, $\log.a = \frac{c}{\sqrt{-1}}$, ~~nell'equazione $c = \sqrt{-1}\log.a$~~ ~~[illegible]~~ ciascu[no]
~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~, esso debbe essere trascelto ~~per~~ sostitu[irlo]
nell'equazione $c = \sqrt{-1}\log.a$, onde nasca l'identica $c = c$; il che, com[e]
necessariamente, che log.a sia una quantità immaginaria, il cui valore è
appunto $\frac{c}{\sqrt{-1}}$. Se si domanda, perchè log.a sia una quantità immagin[aria]
risponderò, perchè così esige il sistema de' logaritmi voluto dall'equazione
dell'arco di cerchio, che si abbia piacer di esprimere per via di logaritmi.
Io non so dare altra risposta che questa, nè mi ridurrò mai a credere, fin[chè]
ella non mi convinca con una chiara e nitida dimostrazione, che l'equazione
$c = \sqrt{-1}\log.a$ possa ridursi a un sistema di logaritmi, in cui log.a sia
una quantità reale, e molto meno, che, per evitare l'assurdo, che nasce[rebbe]
non si debba trascurare il termine $o\sqrt{-1}$, che ella introduce, dentro il log[aritmo]
col suo calcolo, considerando $o\sqrt{-1}$, come zero, ma come una quantità immaginaria.
Le ragioni, sulle quali io stabilisco, che $o\sqrt{-1}$ sia zero, son queste. In due soli [modi]
io posso concepire, che s'intruda nel calcolo questo $o\sqrt{-1}$: o colla posizione
e successiva negazione di una quantità immaginaria, per esempio $b\sqrt{-1} - b[\sqrt{-1}]$
$b - b.\sqrt{-1} = o\sqrt{-1}$, o veramente, avendosi il termine $z\sqrt{-1}$, in cui $z$ è reale
e variabile, col considerare il caso, in cui diventa $z = 0$, onde nasca
$z\sqrt{-1} = o\sqrt{-1}$. Nel primo caso, io non intendo, nè posso intendere altro
se non che quella quantità immaginaria, la quale io aveva posto, [e]
levata, non esista più; e certamente io lascio allora un vero zero; e [così]
non una quantità immaginaria. Lo stesso succederà, se intendo, ...
e poi levata una quantità reale; e questi due zeri, sebbene si poss[ano]
considerare di diverso genere, non saranno mai capaci di alterare la n[atura]
di altre quantità, che lor fossero aggiunte, talmente che valerà sempre [...]
l'una o l'altra di queste due equazioni $x + b\sqrt{-1} - b\sqrt{-1} = y$; $x + b - b = y$
e ciascuna di esse sarà identica con quest'altra $x = y$, nè si potrà ...

mai, che l'y della prima equazione sia immaginario, perchè diventa $y = x + 0\sqrt{-1}$. Dal che concluderemo, che se il $0\sqrt{-1}$, che si aggiunge nel logaritmo della proporzione tra il diam.° e la circonferenza, avrà avuto origine dalla posizione, e successiva negazione di una quantità immaginaria, non potrà far cangiar natura al termine che lo precede sotto il vincolo logaritmico, e che sarà esattamente $\log. -1+0\sqrt{-1} = \log. -1$.

Consideriamo ora l'altro caso, in cui il $0\sqrt{-1}$ nasca dall'ipotesi di $q = 0$ nel termine $q\sqrt{-1}$. Anche qui che intendo io mai, quando dico $q\sqrt{-1}$, se non che la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ esista replicata $q$ volte, e quando dico $0\sqrt{-1}$, se non che la medesima quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ esiste volte zero, cioè non esiste nessuna volta, cioè non v'è più? Ma l'annichilamento di essa lascia un vero zero. Dunque ancora in tal caso è $0\sqrt{-1} = 0$.

Confermo questo medesimo con un esempio tratto dal cerchio. Chiamato il raggio $CB = a$, l'ascissa $CP = x$, l'ordinata $PM = y$, ho subito l'equazione




$y = \sqrt{a^2-x^2}$, che esprimo equivalentemente così: $y = \sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{-1}$. Finchè è $x < a$, le ordinate sono reali; ma quando è $x > a$, le ordinate diventano immaginarie, e però immaginaria la curva, a cui esse corrispondono. Presa l'ascissa $CD$ maggiore del raggio, da $D$ si conduca al cerchio la tangente $DE$, ~~[illegible]~~ e poi il raggio $EC$; sarà $DE = \sqrt{x^2-a^2}$, onde avremo $y = DE\sqrt{-1}$. A misura che il punto $D$ si accosta a $B$ cala la tangente $DE$, la quale si fa $= 0$, quando $D$ cade in $B$. Dunque per questo caso avremo $y = 0\sqrt{-1}$. Ma allora l'ascissa $x$ diventa il raggio $CB$, ed ivi abbiamo $y$ non già immaginaria, ma nulla, ma vero zero; e quest'ultimo zero non può indurre alterazione veruna nelle quantità che gli fossero aggiunte. Dunque nessun $0\sqrt{-1}$; e però l'uno e l'altro si potranno ommettere senza errore.

Il punto $B$ è il limite comune della curva reale e della immaginaria. Se riferiamo l'ordinata in $B$ alla curva immaginaria, per serbare una certa analogia coll'espressione delle successive ordinate, non farem male a indicare il suo valore con $0\sqrt{-1}$; se poi la stessa ordinata in $B$ si riferisce alla curva reale, la noteremo col semplice $0$. La prima espressione vorrà dire, che in $B$ non vi sono più ordinate immaginarie, perchè ivi sono annichilate; la seconda, che in $B$ non vi sono ordinate reali, perchè ivi esse pur sono mancate.

È inutile

È inutile l'avvertire, che i sud.ti zero non si possono confondere colle quantità minori di qualunque data, e che altro è il dire $0\sqrt{-1}$, e il dire $d^m x\sqrt{-1}$ supponendo che $d^m x$ sia di qualunque ordine d'infinitesimi. L'equazione $dy = dx + 0\sqrt{-1}$ è reale in tutti e due i suoi mem[bri]; l'equazione $dy = dx + dz\sqrt{-1}$ è immaginaria nel secondo.

Ma perchè dirò io tante parole, se l'istesso Conte Vincenzo in alcune operazioni sulla controversa formola si serve di questo mio medesimo principio? In fatti egli suppone, che il prodotto di $\overline{z+a\sqrt{-1}} \times \overline{z-a\sqrt{-1}}$ sia $z^2+a^2$, cioè un quanto reale; laddove, se reggesse l'altra dottrina si sarebbe dovuto dire, che ne risulta un quanto immaginario. Perchè è $\overline{z+a\sqrt{-1}} \times \overline{z-a\sqrt{-1}} = z^2 + az\sqrt{-1} - az\sqrt{-1} + a^2 = z^2+a^2+\overline{az-az}\cdot\sqrt{-1} = z^2+a^2+0\sqrt{-1}$, il che renderebbe l'intero prodotto una quantità immaginaria, per non potersi ommettere il termine $0\sqrt{-1}$.

Di più, chiamato A l'arco circolare, egli integra la formola differenziale $dA = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \times \frac{dt}{t}$ così; $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log.-t$, nella quale, perchè la sua sostituzione è $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$, stabilisce, che debba essere $A=0$, quando $t=$[a]. Ma allora abbiamo $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log.a$, ovvero (perchè a è la sottangente e il protonumero della logistica immaginaria; il che rende $\log.a = 0$) $A = \frac{0\sqrt{-1}}{2}$: Dunque la costante nell'integrazione non è bene determinata, perchè la ipotesi, che dovrebbe rendere l'arco $A=0$, il fa eguale a $\frac{0\sqrt{-1}}{2}$, cioè, per lui, a una quantità immaginaria. Il fatto sta, che l'integrazione è giustissima, perchè $\frac{0\sqrt{-1}}{2}$ non è altro che zero.

Chiudo questa tantafera coll'integrare la formola all'arco, senza che nel calcolo s'introduca mai il termine $0\sqrt{-1}$, onde di esso non possa nemmeno nascere alcun sospetto. Dalla sostituzione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$ ricavo $z = a\sqrt{-1} \times \frac{t+a}{t-a}$; e quindi compiendo il resto delle operazioni, arrivo all'integrale $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log.-t$. Per avere il semiquadrante, fo $z=a$, e mi nasce $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{t}{a}$. Supponiamo, che io non sappia, essere $\sqrt{-1}$ il valore del primo membro, e che per trovarlo, io faccia $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = m+n\sqrt{-1}$. Dunque, liberando dalla frazione, avrò $1+\sqrt{-1} = \begin{matrix} m + n\sqrt{-1} \\ +n - m\sqrt{-1} \end{matrix}$. La necessaria identicità di questi due membri mi somministra le due equazioni

$m+n=1$

$m+n=1$; $n-m=1$, onde nasce $m=0$, $n=1$; e però $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$. Quindi nel caso del semiquadrante, avremo $t=a\sqrt{-1}$; e però $\frac{c}{8} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.\, {-a\sqrt{-1}}$. Adoperando in tal modo, come mai si potrebbe rimproverare il Geometra di aver trascurato di aggiungere al termine $-a\sqrt{-1}$ anche il termine $=0$, per far poi nascere $c = 2\sqrt{-1}\log.\overline{-a+0\sqrt{-1}}^{\,2}$.

In verità, non mi sarebbe mai possibile d'intendere la giustizia di un tal rimprovero. Piuttosto da tutto il finquì detto, io crederò di dover legittimamente inferire, che $a\sqrt{-1}$ non sia altro che zero, e che vaglia perciò l'equazione $c = 2\sqrt{-1}\log.{-a}$, ovvero $c = \sqrt{-1}\log. a$; la quale non contiene assurdo alcuno, ma significa solamente, che essa appartiene necessariamente a un sistema di logaritmi tale, che al num.° $a$ in una tal modificazione della $y$, corrisponde un logaritmo immaginario, il cui valore è $\frac{c}{\sqrt{-1}}$.

Questo è il mio ingenuo sentimento intorno alla quistione de' logaritmi delle quantità negative, e della controversia, che ella ha coll'Abate Pestuti. Passo ora a dir qualche cosa sui due paragrafi della sua dottissima dissertazione.

§. X. L'intercetta $-dx$ fra le due ordinate $dy$, o non mi sembra infinita che relativamente alla $dy$, ma non già in se; e non veggo, come dalla natura della logistica si possa derivare, che $z$ debba essere infinita. È giustissima la proporzione $-dx : dy :: \infty : 0$, ovvero sostituito il valore di $-dx$; $z\,dx : dy :: \infty : 0$. Ma per verificar questo, basterebbe, che quando $y=0$, $dx$ fosse infinita rispetto a $dy$, senza che pur $z$ lo fosse. Piuttosto mi pare, che dalla natura della curva, in cui la corda si vibra, trar si potesse la infinità di $z$.

Quando la corda AB è messa in moto dal pizzico, tutte le sue parti si staccan dall'asse, sopra cui non cadono che i soli punti estremi A, B. La curva perciò ACB, in cui essa si conforma, dev'esser concava ad AB, cosicchè l'angolo in A, che fa essa coll'asse, o sia retto, o acuto. Se retto, debb'essere l'infinitesima AD, cioè $dx$ infinitamente minore di DC, cioè $dy$; se acuto, $dx$, e $dy$ sono dello stesso ordine. In questo secondo caso, e molto più nel primo, non si può verificare la sud.a proporzione $z\,dx : dy :: \infty : 0$, se $z$ non è infinita. Dunque &c.

§ XXI. La integrazione della formola di questo num.° ; $-\frac{dz}{z^{\frac{2}{3}}} = \frac{C^2 dx}{C^4 + \ldots}$ alla mia maniera è la seguente. $3 \times \overline{z^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}$ = Arco Rag. C, tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ – Arco Rag C tang. $p$, laddove la sua fa l'omogeneo di comparazione al contrario, perche così è scritta $3 \times \overline{z^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}$ = Arco rag. C tang. $p$ — – Arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Ora, poichè $z = H + x$, e abbiamo la massima tangente, quando $x = 0$, e la minima, quando $x = L$, io non vegg[o] come nella mia integrazione non si salvi, che ai primi, anzi a tutti i valori della $x$, la differenza degli archi risulti una quantità posi[-]tiva, come appunto dev'essere, perche, quando $z$ è più di $H$, il che è sempre vero, quando $x$ è qualche cosa, il primo membro $3 \times z^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ è costantemente una grandezza positiva. Ma appunto allora la tang.$^e$ $p$ è minore della tang.$^e$ $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$; e in conseguenza l'arco di tang.$^e$ $p$ è minore dell'arco di tang.$^e$ $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Dunque Arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ – Arco rag. C tang. $p$ è una quantità positiva, mentre, se mutiamo i segni, com'ella fa, nasce una quantità negativa, che non può corrispondere all'altro membro positivo. Perche poi non insorgano ~~[illegible]~~ nessune in progresso archi negativi, basterà a parer mio fare Arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} = BJ + \frac{2nbC}{c}$, onde provenga

$$\text{Arco rag. C tang. } \frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco rag. C tang. } \frac{C^2}{3(H+L)^{\frac{1}{3}}} = 2nbC + NJ = 2bC \times \overline{n + \tfrac{1}{2}}$$

ove si faccia $NJ = \frac{2bC}{Nc}$. Ma egli è ormai tempo che finisca la mia importunità, la quale deve finalmente cedere a chi ha in sì fatte materie più di me esperienza e dottrina.

Sig.r Conte Riv.mo 

In esecuzione de' suoi riveriti comandi ho fatto subito scrivere a Li=
vorno per il libretto, ch' Ella desiderava, e non fidandomi d'un ne=
goziante ho fatto scrivere per mezzo del Librajo Coletti ad un altro Li=
brajo. Da questo ne ho avuto in risposta dopo il ritardo d'un ordinario
speso in inutili ricerche, che un simil libro, o dissertazione, o Apolo=
gia non è mai stata stampata in Livorno; che però m'informi meglio,
dia il titolo preciso, che cercheranno di nuovo. Ella dunque se ha
qualche ulteriore notizia, me la communichi, e se non ne ha, ne cerchi
chi le ha fatto supporre esistente una tale operetta, e con queste io
tornerò a scrivere, se ve ne sarà di bisogno. Dal Libraio Ascolfi, che ha
fatto il cambio delle lettere meccaniche coi libri, che le ho già spediti,
ho ricevuto jeri il 2.do t.o della Storia Romana che mancava; e quando
Ella non ne abbia premura particolare, gle lo farò avere a prima buo=
na occasione. Ella intanto si servi di me con piena libertà, e mi
creda quale con tutto l'ossequio mi protesto

Di Lei Sig.r Conte Riv.mo

Venezia 18 Marzo 1778

Umil.mo Dev.mo Ser.re
Alberto Vankurgarden

All Nob:le Sig:r Sig:r Pron Col.mo
Il Sig:r Conte Giordano Riccati
Treviso

Ill:mo Sig:r Sig:r Prone Colmo

Inchiusa troverà la risposta alla sua dottissima Scrittura intorno alla rigidità naturale, di cui da tanto tempo le son debitore. Ho aggiunta la soluzione delle sue obbiezioni relative ai num.i X., e XXI. della Dissertazione sul Suono falso, e spero che ne resterà appagata. La settimana ventura le spedirò un foglio, in cui mi lusingo di mettere in chiaro la famosa questione sopra i logaritmi dei numeri negativi. Intanto preparerò qualche cosa sulla controversia col Sig.r Ab. Passuti. Le riflessioni contenute nell'ultima di Lei Scrittura hanno di molto peso, e meritano d'essere considerate posatamente. Io non ho in mira, che la sola verità; e quando mio fratello si sia ingannato, confesserò il suo errore. L'Operetta del Sig.r Passuti non mi è ancor giunta. Letta ch'io l'abbia, ne formerò la stretta analisi, ch'Ella ricerca. La ringrazio infinitamente della sincerità, colla quale mi scrive, che pregio moltissimo, ed è conforme al mio genio; e dimandandola scusa dei replicati disturbi, che le reco, con pienissima stima mi dichiaro.

Di V. S. Ill:ma

Treviso 20. Marzo 1774

Ill:mo Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot:mo Obbl:mo Ser.r Vero
Giordano Riccati

Ill.ma Sig.ra Sig.ra Padrona Col.ma



Ora finalmente rispondo alla sua dotta ed ingegnosa
scrittura. In un cilindretto di acciajo,
che abbia per esempio un pollice di
diametro, e dopo esser passato più volte
per la trafila, la rigidità medesima
sta in equilibrio nella forza attrat=
tiva; e posto un peso minimo
che si attacchi all'estremità inferiore
di esso cilindro, situato verticalmen=
te, lo allungherà alcun poco, supposto
che l'altra estremità sia fermamen=
te attaccata ad un corpo immobile;
ma questo allungamento sarà
così minimo, che non caderà sotto
il senso. Riferisce nella Schedias=
ma 1. che un peso di libre 4. pro=
dusse in una corda di ottone lunga
circa 32 ½ del piede di Parigi
la distensione di linee 1 3/8. Un
peso minimo adunque cagionereb=
be nella detta corda, e molto più
nel cilindretto un allungamento
insensibile.
Per risguardare la sua seconda ob=
biezione, la prego a riflettere
che una corda di metallo è certa=
mente fornita di grandissima
rigidità, la quale tanto è equi=
librata, quanto che la corda
mantiene la sua figura. Ora
ciò posto, questo equilibrio ha
da

da essere rotta anche da una piccolissima forza, dalla vorrebbe. Che il peso dimenante si equilibrasse colla somma della rigidità naturale, e della artificiale, il che se fosse vero la corda non si allungherebbe senonquando il peso superasse la grandezza della rigidità naturale. Avendo io dimostrato, che la corda da me adoperata era fornita della rigidità naturale equivalente a libbre 1134 + $\frac{7}{13}$ ne seguirebbe, che per allungarla si renderebbe necessario un peso maggiore di libbre 1134 + $\frac{7}{13}$ conseguenza affatto contraria agli esperimenti.

Io affermo, che la corda si rompe allora che la somma delle rigidità naturale, ed artificiale eccede la tenacità, o coesione delle sue fibre. Questa coesione da me si assume come un fenomeno, della cui esistenza non si può dubitare, quantunque se ne ignori la causa. La rigidità naturale equilibrata colle forze intrinseche non basta per vincere la tenacità, che per essere superata richiede l'aggiunta della rigidità artificiale.

Una corda fornita della rigidità naturale

naturale h, ~~prestata dal peso~~ p, che abbia la lunghezza L, a la massa m, equivale ~~in riguardo alla~~ distensioni ad una ~~corda~~ matematica, priva di naturale rigidità, a cui fosse applicato il peso h+p, e che nella lunghezza, e nella massa pareggiasse la prima corda; imperciocchè ad amendue le corde si adatterebbe la stessa formola

$\partial l = \frac{L \partial p}{h+p}$. Sarebbero ~~ricolme~~ le due corde equivalenti anche nelle vibrazioni per lungo, se nella seconda corda il peso h fosse privo di massa in quella stessa guisa che è priva di massa nella prima corda la rigidità naturale. Ciò In tale ipotesi posto servirebbe ad entrambe la medesima formola

$$t = \frac{\sqrt{L \cdot \frac{1}{3}m + p}}{\sqrt{h+p}} \cdot \frac{355}{113}$$

Il peso h equivale alla forza intrinseca, che nella corda fisica fa equilibrio colla rigidità naturale, rimanendo al peso p l'ufficio di equilibrarsi colla rigidità artificiale. La sostituzione della corda matematica alla fisica la mostrerà l'economia della forza, che nelle distensioni

dalle

delle corde hanno luogo.

Il terzo Canone considera un'ipotesi chimerica e fisica, fingendo nulla la rigidità naturale, e la mancanza poscia di naturale rigidità, verrebbe restringersi in un punto, tanto che fosse tutto il peso tendente, in quella guisa che di aver la sua rigidità naturale se rigidità è nulla perfettamente, sempre più si dilata, quanto maggiormente cala il peso premente.

Ci siano due di queste corde, le cui lunghezze $l$, $L$, ed i pesi tendenti $p$, $P$, e si avveranno la formula $\frac{dl}{l} = \frac{dp}{p}$, $\frac{dL}{L} = \frac{dP}{P}$.

Sia come suppone il Canone III. $l=L$, e si voglia parimente $dl=dL$, onde ne risulti $\frac{dp}{p} = \frac{dP}{P}$, e prendendo all'analogia $dp : dP :: p : P$.

Ne segue pertanto, che per allungare ugualmente due corde di pari lunghezza, le cui rigidità $p$, $P$, si richiedono forze $dp$, $dP$ proporzionali ad esse rigidità. Non si possono dare due corde fornite di finita naturale lunghezza, e priva di rigidità naturale, la qual è quella, che nelle corde mantiene

la

la competente lunghezza, e perciò ne seguita dalla mia formola, che a $p=0$ corrisponde $l=0$. Nelle corde solide l'ipotesi non è fisica, avendo esse una naturale lunghezza finita; perchè appunto sono necessariamente dotate di rigidità naturale. Un corpo privo di naturale rigidità, che si rende elastico per distensione, dovrebbe restringersi in un punto, quando fosse nulla la forza tendente. Al contrario un corpo privo di rigidità naturale, che si renda elastico per pressione, dovrebbe indefinitamente dilatarsi, secondochè va scemando la forza premente. Tal è la proprietà dell'aria, che per quanta se n'estragga dalla macchina del Boile, sempre ne ~~riempie~~ il recipiente tutto riempie. Ora in riguardo alle aria si trovavano le formole

$-\frac{dl}{l} = \frac{dp}{p}$, $-\frac{dL}{L} = \frac{dP}{P}$, le quali ci manifestano che per costipare ugualmente due corde di aria di pari lunghezza, si rendono necessarj pesi $dp$, $dP$ proporzionali ai pesi prementi

pi, e sia alla rigidità arti-
ficiale della corda prodotta per la
parità delle aria servirà per assi-
curarla; che se si potesse dare una
corda solida priva di naturale
rigidità, le sue lunghezze sarebbe-
ro proporzionali ai pesi stiranti:
Ho detto di sopra che una corda
fisica ~~[illegible]~~, la cui rigidità
$= h$ ed il peso tendente $\rho$ equivale relativamente ai
minimi allungamenti ad una
corda egualmente lunga, priva
di rigidità naturale, e tesa dal
peso $h+p$. Dalla equazione gene-
rale $dl = \frac{l\,dp}{h+p}$, si ponga $\rho = 0$;
e si avrà $dl = \frac{l\,dp}{h}$; espressione,
dalla quale si impara, che in cor-
de egualmente lunghe le disten-
sioni saranno eguali quando sia
$dp$ come $h$, e saranno inversa-
mente come la rigidità $h$, quan-
do sia costante il menomo peso
$dp$. Ma la corda non tesa, e la
cui rigidità $h$, equivale ad una
corda del pari lunga non rigida naturalmente
e stirata dal peso $= h$; dunque
anche in questa gli allungamenti
prodotti dallo stesso peso $dp$
staranno in ragione reciproca
dal

peso spirante
Dell h, come il nostro Cardone afferma.

relazione al num.° × Dalla Dissert.na sul Suono falso

Una chiara, e semplice riflessione relazione al num.° la convincerà; che nella logistica li intercetta ordine fra le due ordinate dy, e ha da agguagliarsi all'infinito. In questa curva due coppie di ordinate, che si rispondano nella medesima proporzione hanno da chiudere dentro di loro eguali intercette. Essendo ei il protomenero, al logaritmo $x = c$ corrisponde il numero ~~relativo della logaritmica~~ $\frac{c}{a}$ ~~Duplicando~~ ~~ragione~~ $= g$ dalla parte delle ordinate decrescenti. Duplica la ragione di $c : g$, e ne nasce la proporzione $c : \frac{g^2}{c}$ e questa servirà fra loro le ordinate dell'asse $= 2c$. Se la porzione si guitando ~~quella~~ progressa cominciata che fra le ordinate $c, \frac{g^n}{c^{n-1}}$ ci sta colla intercetta $-nc$. Se le due coppie di ordinate hanno $c, \frac{g^n}{c^{n-1}}$; dy, e hanno da riferirsi nella stessa ragione, egli è necessario che sia $n = \infty$: ma posto $n = \infty$ l'intercetta $-nc = \infty$ e l'agguaglianza delle ragioni richiede, che sia $-nc = -dx$; dunque $-dx = \infty$; il che Ecc.

Passo al num.ro XXI. Anche io avea usato l'integrazione $3 \cdot g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. C Tang. $p$ ma è stato necessario, che abbandonandola si sostituisca $3 \cdot g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}} =$ Arco Rag. C Tang. $-p$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$

La ragione dipende da ciò, che la costruzione richiede, che l'arco della tangente $= p$ cominci dal nulla, e vada gradatamente crescendo, sintantochè diventi eguale a $\frac{\pi n b C}{c}$ + Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{(3 \cdot H+L)^{\frac{1}{3}}}$, ed è sempre quest'arco maggiore di Arco Rag. C Tang. $\frac{-C^2}{3 \cdot H^{\frac{1}{3}}}$, quando $g > H$ ed in tal ipotesi se avremo il positivo e da una parte e dalle altra delle equazioni. Cangiata integrazione, sarebbe positiva la quantità $3 \cdot g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$, e negativo l'omogeneo di comparazione.

Per la spedizione, che gentilmente mi ha fatta, dell' Operetta del Sig.r Ab. Lessuti, le porgo i ben dovuti ringraziamenti. Esaminata pesatamente la controversia, mi sono accorto, che il Lessuti ha ragione, perchè quando z si eguaglia a nulla, o all'infinito, il numero è reale, e non immaginario come l'uno e l'altro pensava. Presa per mano la formola $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a. \frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$, si cangia essa in $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a$, quando z=0 [illegible]. Frattanto dall'altra formola $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a. \frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ che nasce dal moltiplicare la prima formola per $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$, avremo nell'ipotesi di z=0 avremo $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a. \frac{-a^2+0 \cdot 2az\sqrt{-1}}{a^2}$, nella quale il numero apparisce immaginario. Il Sig. Ab. Lessuti avea debito di sciogliere questo nodo, e nulla egli ne dice. La cosa è assai sottile, e ben ci fa conoscere, che non c'è mai cautela che debbasi trascurare. Il denominatore della seconda formola nasce dal moltiplicare $z-a\sqrt{-1}$

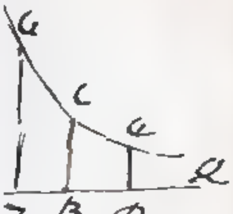


Fig. 1

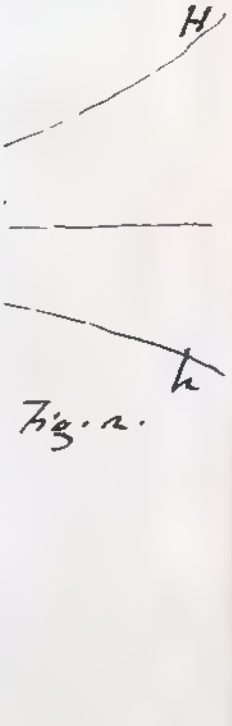


Fig. 2.

considerare le B.7 devono assumersi come negative; e quindi si aja negativa C.B.7.G sarà il logaritmo del numero A7 minore del protonumero, e

$z - a\sqrt{-1}$ in $z + a\sqrt{-1}$; onde ne nasce il prodotto $z^2 + a^2 + az\sqrt{-1} - az\sqrt{-1} = z^2 + a^2 \pm 0\sqrt{-1}$ primo ultimo termine non si dovea trascurare, perchè cangia il denominatore da reale, che sarebbe stato, in immaginario. Avremo dunque nel caso di $z = 0$ la nostra formula

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a^2 \cdot \frac{a^2 + 0\sqrt{-1}}{+a^2 - 0\sqrt{-1}} \text{ ovvero } \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. -a^2$$

egualmente si è da prima scoperto.

Hà inoltre mio fratello pensato, che il numero $-a^2 \cdot \frac{z + a\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$ dovesse essere immaginario, quando $z = \infty$. Anche sopra ciò il Sig. Passuti osservava silenzio. Ecco come io provo essere il numero in tal caso reale. Pongo $z = \frac{a^2}{0}$ e fatta la sostituzione trovo il predetto numero $= -a^2 \cdot \frac{a^2 + 0 \cdot a\sqrt{-1}}{a^2 - 0 \cdot a\sqrt{-1}}$: ma il nulla è del pari positivo, e negativo; dunque io posso scrivere anche così $-a^2 \cdot \frac{a^2 + 0 a\sqrt{-1}}{a^2 + 0 \cdot a\sqrt{-1}} = -a^2$, ed imparare, che il numero è reale quando $z = \infty$.

Dice il Sig. Passuti, che l'Ab. Vincenzo non fu accorto

che fosse $\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$. Ma come si accorse egli
l'equazione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ nell'
ipotesi di $z=a$ si trasforma così $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=$
$\sqrt{-1}$? e questa è quella equazione, di cui
ha fatto uso? Lo sbaglio di una tal
è nato da ciò, che egli ha creduto immagi-
nario il numero quando $z=\infty$ e dipen-
dendo la proporzione stabilita dal Ber-
noulli dalla esatta suddetta circostanza
il numero $=-a$, ha giudicato, che il
Bernoulli si sia ingannato.

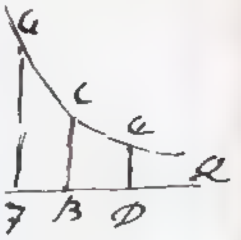


Fig. 1

Fig. 2.

Passa poscia il Sig.r Ab. Dassuti a trattare la
gran quistione intorno alla dottrina dei loga-
ritmi dei numeri negativi, ed immaginarj,
e dichiarandosi favorevole alla sentenza dell'
Eulero, le sue meditazioni hanno da essere
soggette a molte eccezioni. Egli è infallibile,
che ogni numero negativo è fornito di un lo-
garitmo reale, la qual cosa negando l'Eulero,
manifestamente s'inganna. Leggeva nelle quanti-
tà come negative

considerare ... assumendo come ne-
la B7 ... e quindi li aja negativa
gativa; e ... sarà il logaritmo del
CB, 7G
numero A7 minore del proto numero,

onestà ciò, che scrive il Bassani in tale proposito,
ed avrò stimato di comunicarle il mio senti-
mento. Sarà molto bene, che anche alla grande
par[illegible] del Libro dell'Ab. Bassani, e facendo
sopra lo stesso le sue considerazioni; onde
si possa stabilire quella ragionevole risposta,
che ad esso Libro può darsi; e con grandissimo
rispetto mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 24 Marzo 1778.

Ill.mo Sig.r Leopoldo Marc'Ant.
Caldani. Roma

Div.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

La famosa quistione intorno ai logaritmi
dei numeri negativi consiste nello
stabilire, se dato il protonumero f
la logaritmica abbia il solo ramo
dei numeri positivi, o pure anche
quello dei numeri negativi. La
quadratura dell'iperbola la decide
evidentemente, e ci fa toccare con
mano, che la nostra curva è fornita
di due rami uguali; uno al di sopra,
e l'altro al di sotto dell'asse. Ab-
biasi l'iperbola fra gli assintoti se-
gnata nella figura 1, e posto AB pro-
tonumero, l'aja CBDe esprimerà
il logaritmo corrispondente al nume-
ro AD. Essendo l'aja CBQ infinita,
si vede che al numero infinito AQ
si riferirà il logaritmo infinito CBQ.
Il perchè l'aje crescenti da B verso
Q determinano i logaritmi comin-
ciando dal protonumero, e termi-
nando nel numero infinito, onde
ne risulti la porzione di ramo BH (fig. 2)
dalla parte dei numeri positivi mag-
giori del protonumero AB, i loga-
ritmi dei quali sono positivi. Sia
(fig. 1) il numero A7 minore
del protonumero AB, ed essendosi
considerate le BD come positive,
le B7 devono assumersi come ne-
gative; e quindi l'aja negativa
CB7G sarà il logaritmo del
numero A7 minore del protonumero,

e

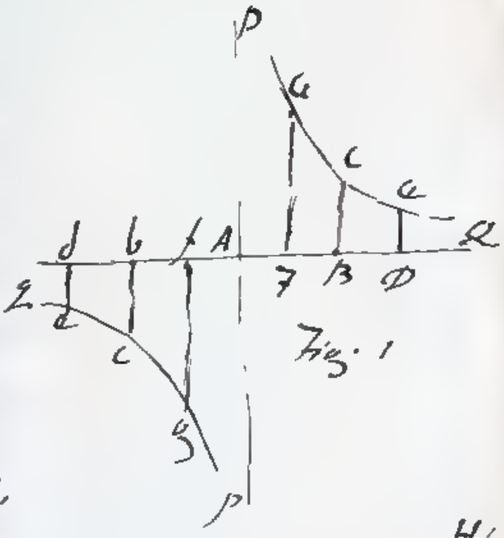


Fig. 1

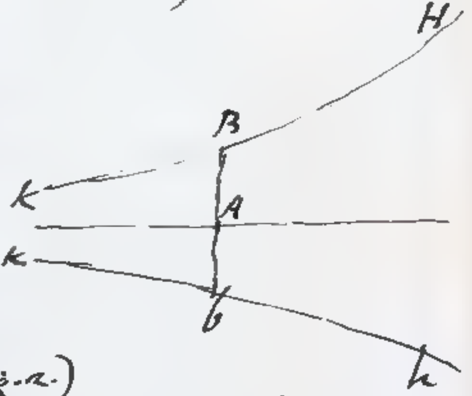


Fig. 2.

e perchè al numero zero ci corrisponde l'aja negativa infinita CBAD, si scopre, che log. $0 = -\infty$, e che l'aje negative CBZG, che cominciano dal nulla, e vanno a terminare nell'infinito, rappresentano i logaritmi dei numeri, che principiano dal protonumero AB, e vanno a terminare nel nulla. Ne nascerà pertanto la porzione di ramo BK (fig. 2) che serve ai numeri decrescenti, i cui logaritmi sono negativi.

Divenga negativo il numero Af (fig. 1) ed essendo altresì negativa l'ordinata fg dell'iperbola, dovrà considerarsi come positiva l'aja gfAp perchè il logaritmo di Af si uguaglierà all'aja negativa CBAD levatane la positiva gfAp. Segue AZ = Af, e dandosi uguaglianza fra l'aje GZAD, gfAp, verrà il logaritmo di Af uguale all'aja CBZG: ma alla stessa aja si uguaglia il logaritmo del numero positivo AZ uguale al negativo Af; dunque due numeri uguali, uno positivo, e l'altro negativo richiedono il medesimo logaritmo. Posto il numero negativo Af = Ab = AB, l'aja CBZG anche diventa = 0; e perciò al numero negativo Ab uguale al protonumero AB compete il logaritmo = 0. È questa

facile da cavare la conseguenza, che i predetti numeri, e logaritmi danno l'origine alla porzione di ramo inferiore kb (fig. 2.) uguale al superiore KB, riferendosi sempre allo stesso logaritmo due numeri uguali, uno positivo, e l'altro negativo. Torno alla (fig. 1.), e supponendo il numero negativo $Ad > Ab$, gli converrà il logaritmo uguale all'aja positiva $cbda = CBDC$, pigliando $AD = Ad$, onde sempre a due numeri uguali uno positivo, e l'altro negativo compete il medesimo logaritmo. Ne nascerà dunque la porzione di ramo inferiore bh (fig. 2.) uguale al superiore BH, e quindi la logistica, posto il protonumero $= AB$, sarà formata dai due rami KBH, kbh forniti della proprietà, che allo stesso logaritmo corrispondono costantemente due numeri uguali uno positivo, e l'altro negativo.

Dopo una sì chiara, e palpabile dimostrazione, sembra che non si dovesse più questionare intorno dei logaritmi reali dei numeri negativi, e nulladimeno quei che li negano sono stati condotti all'errore dalla formola esponenziale $f\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{x}{f}} = y$, la quale (esprimendo f il protonumero,

e la base della logistica, ed i cui logaritmo $= f$, $x$ i logaritmi, $y$ i numeri) non dà compitamente salvochè il ramo KBH. Il conchiudersi da ciò, che la logaritmica è priva del ramo inferiore khh, non è conseguenza legittima, dovendo piuttosto considerarsi la predetta formola come imperfetta. Infatti essendovi nella logistica infinite coppie di coordinate, non c'è ragione di scegliere le due $f$, $a$, e di escludere tutte le altre. Qual maraviglia dunque, che questa scelta arbitraria ristringa l'equazione, dimodochè ci somministri il solo ramo KBH?

M'è caduto ~~dunque~~ quindi in pensiero di sostituire alle coordinate $f$, $a$ fornite di un costante valore, le due $h$, $g$ indefinitissime, cioè a dire capaci di infiniti valori relativi, onde ne provenga la formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{x}{h}} = y$. Affermo pertanto, che a qualunque logaritmo $x$ corrispondono i due numeri $\pm y$, e voglia il vero io posso sempre determinare un tal valore di $h$, che si riferisca ad $x$ come il numero ~~impa~~ pari $n$ all'impari $m$, onde si abbia $\frac{x}{h} = \frac{m}{n}$, e perciò

$f\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{h}} = f\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{m}{n}} = f.\pm\sqrt[n]{\left(\frac{e}{f}\right)^{m}} = y$ ec.
Per la qual cosa scelte le opportune
grandezze delle coordinate infinite-
simi h, g, io otterrò sempre che
sia $f.\pm\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{x}{h}} = y$, e tanto col mezzo
tanto della quadratura dell'iper-
bola, quanto dell'equazione es-
ponenziale della logistica dimos-
trerò, che una tal curva è composta
dei due rami eguali KBH, kbh.
Si cavi la conseguenza assai rimarca-
bile quello, che dice il Sig.r D'Alam-
bert nell'Enciclopedia francese,
che posti i protonumero, e dy nu-
mero, sono eguali i due logaritmi
di $\sqrt{y}$, e di $-\sqrt{y}$. Ovvero nasca y da
$+1.+y$, ~~o da~~ o da $-1.-y$; sarà
sempre vero, che la radice di y
sarà $=\pm\sqrt{y}$, e l'affermare che
nella prima ipotesi sia immagi-
nario log. $-\sqrt{y}$ non si può certa-
mente sostenere, essendo contra-
rio alla chiarissima dimostrazio-
ne da me allegata, che assunto
il protonumero $=1$, i due nu-
meri $\pm\sqrt{y}$ richiedono il mede-
simo logaritmo.
Abbiansi due serie corrispondenti
$f, -e, \frac{e^2}{f}, -\frac{e^3}{f^2}$ &c.
$0, f, 2f, 3f$ &c. la prima
geometrica

geometrica di numeri, e la seconda aritmetica di logaritmi. Apertamente si vede, che i numeri passano da un ramo all'altro della logistica, spettando $f$, $\frac{a^2}{f}$ &c al ramo superiore KBH, e $-a$, $-\frac{a^3}{f^2}$ al ramo inferiore kbh. La nostra curva per altro, ch'è trascendente, non è contenta dei mentovati due rami reali, ma se ne approprïa infiniti di immaginarj. Si pongano nella premessa serie geometrica delle medie geometricamente proporzionali fra i termini vicini, e nella aritmetica delle medie aritmetiche ed avremo la nuova progressione

$$f,\ \pm\sqrt{fa}\sqrt{-1},\ -a,\ \pm\sqrt{\frac{a^3}{f}}\sqrt{-1},\ \frac{a^2}{f},\ \pm\sqrt{\frac{a^5}{f^3}}\sqrt{-1},\ -\frac{a^3}{f^2}$$

$$0,\ \tfrac{1}{2}f,\ f,\ \tfrac{3}{2}f,\ 2f,\ \tfrac{5}{2}f,\ 3f$$

nella prima delle quali i termini moltiplicati per $\sqrt{-1}$ competono a rami immaginarj.

Gl'innumerabili rami immaginarj altresì ammettono de' logaritmi immaginarj, come apparisce dalla serie

$$a,\ -a\sqrt{-1},\ -a,\ a\sqrt{-1},\ a\ \&c.$$

$$\frac{0}{\sqrt{-1}},\ \frac{c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{c}{2\sqrt{-1}},\ \frac{3c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{c}{\sqrt{-1}}\ \&c$$

Serva il detto sin qui per conoscere la natura della nuova trascendente,

che

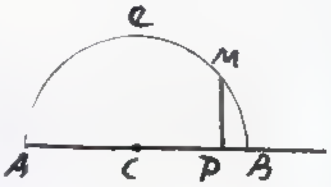
che abbiam per le mani, la qual è composta da infiniti rami, due reali, ed il rimanente immaginarj. ~~[illegible]~~ Passiamo presentemente ~~[illegible]~~ a discorrere della controversia fra mio Fratello, ed il Sig.r Ab. Rossuti.

Afferma l'Ab. Vincenzo, che nella formola

$A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \log. -1 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \log. - a \cdot \frac{z^2 - a^2 + 2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$

la quantità $- a \cdot \frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ non si possa trasandare nell'ipotesi di $z = 0$; perchè conserva &c.

Afferma mio Fratello, che nella formola $A = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l. -a \cdot \frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ la quantità $-a \cdot \frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ nella ipotesi di $z=0$ non si possa trascurare; perchè conserva alla quantità $-a \cdot \frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ la proprietà di immaginaria, di cui è costantemente fornita. Ella adverisca all'opinione contraria, e per confermarla la discorre così. Nel circolo $AeMB$, il cui raggio $CB=a$, quando l'assissa $CP=x$ è maggiore di $a$, abbiamo l'equazione immaginaria $y=\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{-1}$. Fatta $x=a$, troveremo $y=0\sqrt{-1}$: ma in tal incontro l'ordinata $y$ è veramente uguale a nulla; dunque $0\sqrt{-1}=0$, e perciò con ragione nella supposizione di $z=0$ il termine $-\frac{2a^2z\sqrt{-1}}{z^2+a^2} = -0\sqrt{-1}$ si deve ammettere.



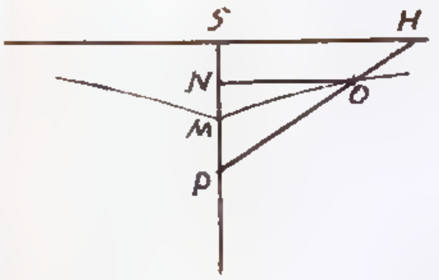

La supplico di osservare, che nel circolo il punto $B$ separa il reale dall'immaginario, il quale solamente avendosi quando $x>a$, ne segue, che nel punto $B$ l'ordinata $y$ pareggi un nulla reale.

Il caso, su cui verte la disputa, sembra molto diverso. Il termine $-a\cdot\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2}$ è sempre immaginario, posta la $z$ o negativa, o positiva. Sia $\omega$ una quantità minima, e facendo $z=-\omega$, avremo $-a\cdot\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2} = 2\omega\sqrt{-1}$ quantità immaginaria. Mettendo $z=\omega$, troveremo $-a\cdot\frac{2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2} = -2\omega\sqrt{-1}$ quantità altresì immaginaria per quanto picciolo sia

il

il valore di $w$. Il perchè il nostro ter-
mine conserverà la stessa natura, anche
quando $w = a$, ed essendo $-a\sqrt{-1}$ gran-
dezza immaginaria, pare innegabile,
che non possa tralasciarsi, e ragione che
fa essa l'effetto di rendere immagina-
ria la quantità $= a . \frac{z^2 - a^2 + 2az\sqrt{-1}}{z^2 + a^2}$ ....

Mi ricordo di una controversia, che ebbi
colla celebre Sig.ra Co. D. Maria Agnesi,
quando mi comandò di esaminare il
suo primo Tomo delle Istituzioni Anali-
tiche: Il ramo inferiore della Concoide
di Nicomede ha la figura, che segno qui
accanto, quando nell'equazione, che
gli compete $\pm y = \frac{b-x\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, è $PS = b$
maggiore di $MS = OH = a$. Asseriva la
Sig.ra Contessa, che il punto solitario P
appartiene alla curva, ed io ciò negava
fondato sull'evidente ragione, che il
punto O descrivente la curva non può
passare per P. Il suo inganno traeva
l'origine dal credere, che la quantità
$\sqrt{a^2-x^2}$, la quale nella ipotesi di $SN =$
$x > SM = a$ è immaginaria ed $=$
$\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{-1}$, potesse moltiplicata nel
nulla (il che avviene, quando $SN = x$
$= SP = b$) uguagliarsi ad un nulla reale,
dimodochè nel punto P fosse $\pm y = 0$.
Perchè sia $x > a$, il valore di $y$ è sem-
pre immaginario e quando $x$ cala di
$b$, e quando lo supera; dunque conser-
verà la stessa natura anche quando $x$
$= b$, e perciò in tale incontro $\pm y = 0\sqrt{-1}$
è una quantità immaginaria, il che
tanto è vero, quanto che il punto P




non

non può mai spettare alla curva, non passando per essa il punto O, da cui viene descritta.

Sembra, che l'addotto esempio quadri a maraviglia colla nostra quistione; senonchè da Lei si fa la giustissima riflessione, che sendosi il termine $-a\cdot\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ multiplicato per $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$, ne risulta il prodotto $-a\cdot\frac{z^2-a^2+2az\sqrt{-1}}{z^2+a^2-0\sqrt{-1}}$. Segno il termine $0\sqrt{-1}$ col $-$; perchè il nulla si può egualmente assumere e come positivo, e come negativo. Sia $z=0$, e ne nascerà $-a\cdot\frac{-a^2+0\sqrt{-1}}{a^2+0\sqrt{-1}}=-t$, e per conseguenza $-t=a$. Avremo pertanto $A=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l-t=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,la$ nella ipotesi di $z=0$. Lo stesso si deduce dalla formola $A=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l-t=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,l\left(-a\cdot\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)=\frac{\sqrt{-1}}{2}\,la$, supposta come sopra $z=0$.

Il caso di $z=\infty$ ha fatto impressione nell'animo di mio fratello, dicendo egli nella sua lettera, che quantunque $a$ sia minima in riguardo a $z$, nulladimeno il termine $a\sqrt{-1}$ rende immaginario il numeratore, ed il denominatore della frazione $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$. Esaminiamo qual conseguenza da ciò ne nasca. Il quadrante di circolo corrisponde alla tangente $z=\infty=\frac{a^2}{0}$. Sostituito questo valore, trovo $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$: ma il nulla è del pari positivo, e negativo; dunque $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}}=1$, e perciò nella ipotesi di $z=\infty$, $-a\cdot\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=-a$. Lo stesso si trova, facendo come il numero $a$,

che

che corrisponde all'arco nullo; al numero $-a\sqrt{-1}$, che corrisponde al semiquadrante, così questo numero al quarto proporzionale, che corrisponderà al quadrante, e si aguaglierà al numero $-a$, qualmente ho poco fa scoperto con altro metodo.

Ora si vede l'apparente disparità fra il presente caso, e quello della Concoide. In questa curva $y = 0\sqrt{-1}$ è senza dubbio immaginaria; perchè $\sqrt{-1}$ ritiene la natura d'immaginaria, anche quando è moltiplicata pel nulla. Ma nel nostro caso la quantità immaginaria $a+0\sqrt{-1}$ diversa per se stessa mi dà l'unità reale. Che nel problema, di cui si tratta, sia $0\sqrt{-1}$, o pure $\frac{0}{\sqrt{-1}}$ grandezza immaginaria, si vede chiaramente, mettendoci sotto gli occhi la formola, quando alla tangente $= 0$ corrisponde l'arco $A = 0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} la$, da cui si deduce $la = \frac{0}{\sqrt{-1}}$ quantità immaginaria, che moltiplicata per $\sqrt{-1}$ diviene un nulla reale, al quale l'arco si aguaglia.

All'integrazione usata dall'Ab. Vincenzo si adattano le due seguenti serie, geometrica di numeri, ed aritmetica di logaritmi [illegible]

[illegible] $a$, [illegible] $a\sqrt{-1}$, [illegible] $a$, [illegible] $a\sqrt{-1}$, [illegible] $a$. ecc.

$\frac{0}{\sqrt{-1}}$, [illegible] $\frac{\pi c}{4\sqrt{-1}}$, [illegible] $\frac{2\pi c}{4\sqrt{-1}}$, [illegible] $\frac{3\pi c}{4\sqrt{-1}}$, [illegible] $\frac{4\pi c}{4\sqrt{-1}}$ ecc.

Ma e perchè non si potrebbe integrare senz'aggiunger costante, onde ci si presenti $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} lt = \frac{\sqrt{-1}}{2} la \cdot \frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$? Fatto $z = 0$, si avrebbe, quando l'arco $= 0$, $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} l{-a} = 0$, e ne risulterebbe $l{-a} = \frac{0}{\sqrt{-1}}$. Abbiamo veduto, che un tal

logaritmo

logaritmo competente al numero a; e quindi ai due numeri $\pm a$ non solo si adatta il medesimo logaritmo reale $= 0$ giusto a quanto ho già dimostrato, ma ancora il medesimo logaritmo immaginario $= \frac{0}{\sqrt{-1}}$. È facile lo inferire essere

$A = \frac{c}{8} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.a\sqrt{-1}$, $A = \frac{c}{4} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la$,
$A = \frac{3c}{8} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.-a\sqrt{-1}$; $A = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.-a$ &c.

Il perchè ne nasceranno le due serie

$-a,\ a\sqrt{-1},\ a,\ -a\sqrt{-1},\ -a$ &c.
$\frac{0}{\sqrt{-1}},\ \frac{c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{2c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{3c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{4c}{4\sqrt{-1}}$ &c.

Paragonate insieme le due coppie di serie, si vede che a due numeri eguali uno positivo, e l'altro negativo si riferisce lo stesso logaritmo, preso sempre a par protonumero.

E poichè $\frac{c}{4} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la$, sarà $\frac{c}{2} = \sqrt{-1}\, la$; e quindi il diametro al perimetro del circolo come 1 a $\sqrt{-1}\, la$, o sia come $1 : \sqrt{-1}\, la :: \frac{1}{\sqrt{-1}} : la :: \sqrt{-1} : -la$; ma nella supposizione del protonumero $= 1$, $-l1 = l1$; dunque il diametro alla circonferenza circolare come $\sqrt{-1} : l1$. Colla prima integrazione si è stabilito il diametro alla detta circonferenza come $\sqrt{-1} : l-1$, e colla seconda come $\sqrt{-1} : l1$, e dovendo queste ragioni unirsi in una sola, ne segue essere $l-1 = l1$. Infatti se $l1 = \frac{0}{\sqrt{-1}}$, sarà $\frac{1}{2} l1 = l\sqrt{1} = l\pm 1 = \frac{0}{\sqrt{-1}}$.

Essendo $l\pm a = \frac{0}{\sqrt{-1}}$, presa una media geometrica fra i due numeri $\pm a$, avremo $l\pm a\sqrt{-1} = \frac{0}{\sqrt{-1}}$. Ne proverranno adunque le due coppie di serie $-a\sqrt{-1},\ -a,\ a\sqrt{-1},\ a$ &c.

$\frac{0}{\sqrt{-1}},\ \frac{c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{2c}{4\sqrt{-1}},\ \frac{3c}{4\sqrt{-1}}$ &c.

$a\sqrt{-1}$ , $a$ , $-a\sqrt{-1}$ , $-a$ &c.

$\frac{0}{\sqrt{-1}}$ , $\frac{c}{4\sqrt{-1}}$ , $\frac{2c}{4\sqrt{-1}}$ , $\frac{3c}{4\sqrt{-1}}$ &c.

Accaderà pertanto che sia

$$\frac{0}{\sqrt{-1}} = \begin{cases} la \\ l{-a} \\ l{-a\sqrt{-1}} \\ la\sqrt{-1} \end{cases} \quad \frac{c}{4\sqrt{-1}} = \begin{cases} l{-a\sqrt{-1}} \\ la\sqrt{-1} \\ l{-a} \\ la \end{cases} \quad \&c.$$

e che allo stesso numero per esempio $a$ possano spettare i log. $\frac{0}{\sqrt{-1}}$, $\frac{c}{4\sqrt{-1}}$, $\frac{2c}{4\sqrt{-1}}$, $\frac{3c}{4\sqrt{-1}}$ &c.

Dalle cose a lungo discusse egli è di nuovo raccogliere, che la proposizione di mio fratello, che gli archi di circolo si agguaglino ai logaritmi immaginarj dei numeri immaginarj moltiplicati per $\frac{\sqrt{-1}}{2}$, è sempre vera in riguardo ai logaritmi, e si verifica parimente in riguardo ai numeri, eccettuati i casi della tangente $z = 0$, o uguale all'infinito. Ella esamini quanto ho scritto colla solita sua penetrazione, e mi comunichi il suo riputatissimo parere colla consueta sincerità.

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo

Ella vedrà cosa io pensi in proposito della logistica, e qualmente io rispetti la verità relativamente alla controversia col Sig. Ab. Lassuti, dopo che una sua giustissima riflessione mi ha condotto a scoprirla. Essendomi pervenuto il Libro del predetto Sig. Ab. esaminerò ciò che scrive de' logaritmi dei numeri negativi, ed immaginarj, né mancherò di comunicarle il risultato delle mie meditazioni. Le rassegno la mia divozione, e sono

Di V. S. Ill.ma

Treviso 27. Marzo 1776.

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot. Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Illmo Sig.r Sig.r Pron Colmo 

Dal Illmo Monsig.r Priesti avrà V.S. Illma ricevuto il nuovo tomo del Tiraboschi, il cui importo mi è stato da lui pagato. Per non lasciar però ancora accesa la partitella del Tomo avanti, che potrebbe fare equivoco, debbo pregarla di far avere le poche lire al Sig.r Antonio Bettinardo, da cui mi saranno spedite; e resto con protestarmi con vero rispetto

di V.S. Illma

Venª 7 aple 1778

La Partell del Tomo VI. fu da me pagata li 4 Marzo 1777 al Sig.r Bettinardo

Umilissimo Devmo Obbligmo Servitore
Gasparo Storti

---


...ue dove
o, che le
di coesione
forza, che
iche di un
ll altra.
delle due
nel due
forza
di l'aria
be un peso
solo un allum-
ometrico
zio, riceverò
e della

mo falso: e
il num.o, che
nfinito: ma
e; anzi io
che realmente
eguale
ciò non ostan-
gistica
ando col
gia
infinita,
uam
nd'anche
differenziando,
a qualora
y; dunque
rà almeno
infinito,
ie con

una quantità finita. Ma ... è almeno una quantità fini...
la differenza del suo logaritmo si dirà, che ove il num.o sia zero, la differenza del
molto maggior ragione ... Ma $-du = zdx$. Dunque in questo caso
suo logaritmo sia almeno finita. ... e siccome $dx$ si assume infinitesima, debb'esser
$zdx$ è una quantità finita;
$z$ infinita.

rue dotte
o, che le
di coesione
forza, che
riche di un
'll altra
delle due
nei due
forza
lli l'aria
lbe un peso
solo un allum-
ometrico
zio, riceverò
e della

mo falso: e
il num.°, che
finito: ma
e; anzi io
rche realmente
eguale.
ciò non ostan-
gistica
ando col
gia.
infinita,
iam
nd'anche
differenziando,
a qualora
y; dunque
rà almeno
infinito,
ue con

una quantità finita. ...
la differenza del suo logaritmo è almeno una quantità finita,
molto maggior ragione si dirà, che ove il num.° sia zero, la differenza del
suo logaritmo sia almeno finita. Ma $-du = z\,dx$; Dunque in questo caso
$z\,dx$ è una quantità finita; e siccome $dx$ si assume infinitesima, debb'essere
$z$ infinita.

92

All'Ill.mo Sig.r e Sig.r Pron Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

Sul proposito della rigidità naturale delle corde io sarei contentissimo delle sue dotte
riflessioni, se io potessi spogliarmi della idea, che ho fitta in capo da tanto tempo, che le
parti costituenti un corpo solido aderiscano l'una all'altra con una forza di coesione
finita, per vincer la quale sia necessario applicare in senso contrario una forza, che
la superi, onde produrre anche un minimo moto. Due minime zone cilindriche di un
pollice di diametro in una verga di metallo io le considerava l'una all'altra
attaccate insieme con una aderescenza nata dall'attrazione scambievole delle due
basi che si combaciano presso a poco come per impulsione esterna accade nei due
emisferi Maddeburgici, per istaccare iguali anche minimamente è necessaria una forza
in senso contrario maggiore della pressione finita, che esercita su d'essi l'aria
esteriore. Se ciò fosse vero, come a me pare, ella vede, che non potrebbe un peso
minimo, anzi nemmeno un peso finito fino a un certo segno produrre non solo un allun-
gamento insensibile, ma nè anche una distrazione infinitesima in rigor geometrico
nella sudda verga di metallo. Se io potrò distruggere questo mio pregiudizio, riceverò
in tutto e per tutto le ingegnosissime illustrazioni, che ella mi ha date della
sua bella Teoria.

Ella mi permetta, che io torni ai due paragrafi della sua dissertazione sul suono falso: e
quanto al § X. io veggo chiaramente, che chiamato c il protonumo, e y il numo, che
sa per log° $-c$, l'intercetta tra $\underline{dy}$, $\underline{o}$ debb'essere $-nc$, supposto $n$ infinito: ma
questa a me par che equivalga a $-u$, e non a $-du$, com'ella scrive; anzi io
la farei eguale a $-nu$, supposto $n$ infinito, e anche $u$ infinito, perchè realmente
l'intervallo tra $c$, e $+dy$, cioè $-u$ è infinito, e il secondo intervallo eguale
corrisponde al numero $\underline{dy^2}$, che è infinitamente maggiore di zero. Ciò non ostan-
te io ho dimostrato così la infinità di ?. Posta l'equazione alla logistica
$-u = ly$, suppongo, che $y$ diventi $dy$, e avrò $-u = \int dy$, e differenziando col
protonumero, e tangte. 1. nascerà $-du = \frac{ddy}{dy}$, da cui deduco l'analogia
$-du : ddy :: 1 : dy$. Per questo primo caso pare, che sebbene $-u$ sia infinita,
il suo differenziale $-du$ resti un infinitesimo di primo grado. Facciamo
dunque, che $y$ diventi $dy^n$, di cui è sempre minore 0, quand'anche
sia $n$ infinito. Allora $-u = \int dy^n$, ovvero $-u = n\int dy$; e però, differenziando,
sarà $-du = \frac{nddy}{dy}$, onde nasce l'analogia $-du : ddy :: n : dy$. Ma qualora
$n$ sia infinito, lo stesso $n$ è infinitamente infinito rispetto a $dy$; dunque
$-du$ sarà infinitamente infinito rispetto a $ddy$, e però $-du$ sarà almeno
una quantità finita. Quindi ricavo, che essendo il numo $dy^n$, e $n$ infinito,
la differenza del suo logaritmo è almeno una quantità finita. Dunque con
molto maggior ragione si dirà, che ove il numo sia zero, la differenza del
suo logaritmo sia almeno finita. Ma $-du = zdx$; dunque in questo caso
$zdx$ è una quantità finita; e siccome $dx$ si assume infinitesima, debb'essere
$z$ infinita.

9 Quanto poi al § XXI, io temo nell'altre mie lettere di non essermi chiaramente spiegato. La sua equazione differenziale è la seguente $-\frac{dg}{g^{\frac{2}{3}}} = \frac{C^2 d\rho}{C^2+\rho^2}$, la quale può anche essere così espressa $\frac{dg}{g^{\frac{2}{3}}} = -\frac{C^2 d\rho}{C^2+\rho^2}$. Se integro l'equazione, col prendere gli archi positivi, mi risulta $B - 3g^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C tang. $\rho$, intendendo per B una costante da determinarsi colle condizioni del Problema, e dopo queste determinazioni, proviene $3H^{\frac{1}{3}}$ + Arco Rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ $-3g^{\frac{1}{3}}$ = Arco Rag. C tang. $\rho$, onde finalmente $3 \times g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = . Arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ − Arco rag. C tang. $\rho$. Siccome quando $x$ è qualche cosa di positivo, $g$ è maggiore di $H$. Dunque $g^{\frac{1}{3}}-H^{\frac{1}{3}}$ è una quantità positiva; ma crescendo $x$, cala $\rho$, perchè, quando $x=0$, l'arco di raggio C tang. $\rho$ diventa l'arco di raggio C, tang. $\frac{C^2}{3\cdot H^{\frac{1}{3}}}$, e questa tangente è minore della tang.e $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Dunque arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ − arco rag. C tang. $\rho$ sarà sempre una quantità positiva, come lo è $g^{\frac{1}{3}}-H^{\frac{1}{3}}$, e quindi non ne risulta assurdo alcuno.

Integrando la seconda equazione, nasce appunto, come ella ha trovato $3\cdot g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = Arco rag. C tang. $-\rho$ − Arco rag. C, tang. $-\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Ma questa equazione è affatto identica coll'altra superiore, perchè Arco rag. C tang. $-\rho$ è il negativo di arco rag. C tang. $\rho$, ed equivale a − Arco rag. C tang. $\rho$. Di più arco rag. C tang. $-\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ è il negativo di arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$, ed equivale a − arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Dunque − arco rag C tang. $-\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ = + arco rag C tang. $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$. Dunque &c.

Se adotteremo la sua integrazione $3\cdot g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}$ = Arco rag C tang. $\rho$ − Arco rag. C tang. $\frac{C^2}{3\cdot H^{\frac{1}{3}}}$, sarà allora appunto che avremo un positivo eguale a un negativo perchè l'arco di tang. $\rho$ al principio eguale all'arco di tang.e $\frac{C^2}{3H^{\frac{1}{3}}}$ va sempre diminuendo fino a divenire l'arco di rag. C tang. $\frac{C^2}{3\cdot H^{\frac{1}{3}}}$

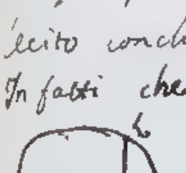
Passiamo ora a parlare della controversia col Pezzuti. E prima di tutto le dirò, che, se io ~~fossi~~ restato persuaso, che più rami abbia la logistica, non sapeva vedere, come essa se ne appropri un num.o infinito, quando sia dato il protonumero, e la base. Sia il protonum.o $f$, e la base $-e$, onde abbiasi la serie geometrica

$f$, $-e$, $\frac{e^2}{f}$, $-\frac{e^3}{f^2}$ &c, e l'altra aritmetica

0, $f$, $2f$, $3f$ &c. Chiarissime mi erano riuscite le sue riflessioni per concludere che al log.o $f$ non solo corrisponde il num.o $-e$, ma anche il num.o $e$, onde risultano i due rami positivo e negativo. Ma oltre di questi non sapeva vedere il num.o infinito dei rami immaginarj, che nascono dal trovare tutte le medie proporzionali di qualunque indice tra $f$, e $-e$. ~~positive e negative.~~ ~~razionali ponno ammettersi positive e negative~~ Finalmente la considerazione semplicissima, che la prima delle medie di num.o $n$ chiamata $z$, veniva data dall'equazione $z^n = -ea^{n-1}$, mi ha convinto interamente.

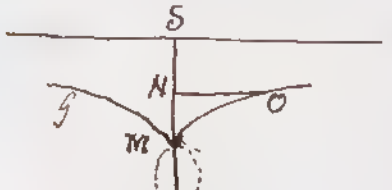
Per altro questa semplice riflessione potrebbe, cred'io, convincere della necessità
de' due rami nella logistica, un positivo, e l'altro negativo. Abbiasi
l'equazione $\log.\frac{\overline{x+a}^2}{m} = \log.\frac{bc}{m}$, in cui $m$ è il protonumero, e la sottan-
gente, e si vogliano i valori di $x$. Dunque $2\log.\overline{x+a} = \log.\frac{bc}{m}$, ovvero
$\log.\overline{x+a} = \frac{1}{2}\log.\frac{bc}{m} = \log.\frac{\sqrt{bc}}{m^{\frac{1}{2}}\times m^{\frac{1}{2}-1}} = \log.\sqrt{bc}$. Levando i logaritmi,
quando i num.i debbano essere tutti e due positivi, io non ho altro che
che un valore di $x$, che risulta dall' equazione $x+a=\sqrt{bc}$, e l'altro
valore $x+a=-\sqrt{bc}$ io non l'avrò mai; se non scrivo l'equazione
logaritmica così $\log.\overline{x+a} = \log.\pm\sqrt{bc}$; il che indica la presenza
de' due rami nella logaritmica.

Quanto poi alla quantità $0\sqrt{-1}$, io non potrò mai convenire con chi pensa, essere
questa una quantità capace di rendere immaginario un aggregato composto
di essa, e di quantità reali, perchè o s'intenda posta e poi levata una
quantità reale, ovvero posta, e poi levata una quantità immaginaria,
i residui, che sono o zero di quantità reale, o zero di quantità immagi-
naria non influiranno mai niente ne' valori delle radici d'un' equazione.
Ella mi esclude il caso da me recato del circolo, perchè il punto dove
terminano le ordinate ~~im~~maginarie è il principio delle reali, e si riduce
a que' zero di immaginarj, in cui la variabile qualunque valore abbia
o maggiore o minore, formi sempre colla sua moltiplicazione in $\sqrt{-1}$ una
quantità immaginaria; e allora assicura, che $0\sqrt{-1}$ renderà immaginario
un aggregato, che senza di essa sarebbe reale. Fingasi dunque l'equa-
zione $y^2+\overline{x-a}^2=0$, ovvero $y=\overline{x-a}\sqrt{-1}$: Egli è certo, che o si faccia
$x>a$, o $x<a$, sempre sarà $y$ eguale a un immaginario. Ma è egli
lecito concludere: dunque sarà $y$ immaginario anche ove sia $x=a$? No certo
se non se quel che avviene
In fatti che altro mai significa la sud.a equazione




al circolo del centro C, e del raggio CB, in cui si prendano le ascisse
AJ da un punto A distante dal centro per la quantità $AC=a$, quando
il raggio CB diventa nullo? Allora il cerchio diventa un punto, e questo
è il punto C. Tutte le ordinate TK diventano immaginarie, o corrispondano a un'
ascissa maggiore, o ad una minore di AC. Ma quando si fa l'ascissa $x=AC=a$,
allora l'ordinata $y$ non è immaginaria, ma zero, perchè la curva è divenuta il punto
C; e nella equazione $y=\overline{x-a}\sqrt{-1}$ fatta $x=a$, diventa $y=0\sqrt{-1}$. Dunque
per il nostro caso eccole un $0\sqrt{-1}$ che non è immaginario, benchè non vi
sia alcun altro punto di curva reale.
Aggiungo l'equazione $y=\frac{\overline{a+x\sqrt{-1}}\times\overline{a-x\sqrt{-1}}}{a}$, che equivale a quest'altra $y=\frac{a^2+x^2+0\sqrt{-1}}{a}$.
La presenza di $0\sqrt{-1}$ nel numeratore si dirà che rende immaginaria la $y$; e in

9 conseguenza, che l'equazione spetta a una parabola immaginaria?
Abbiasi l'equazione $y = a + x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1}$, ovvero $y - a = x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1}$. Fatti i quadrati, abbiamo $\overline{y-a}^2 = -x^2 + 2x^2 - x^2 = \pm 0^2$. Dunque, preso il segno positivo, ho $y - a = 0$, e preso il negativo, ho $y - a = 0\sqrt{-1}$, e quindi mi è indifferente il servirmi o di $0$, o di $0\sqrt{-1}$ negli omogenei, sicuro essen[do] che nè l'uno, nè l'altro mi altera il valore di $y = a$
Accordo, che nel caso addotto della concoide il polo P non è punto di curva e però nell'equazione $y = \frac{b-x\sqrt{x^2-x^2}}{x}$, fatto $x = b$, il valore di $y = 0\sqrt{-1}$ n[on] indica il punto, in cui l'ordinata reale della concoide diventa zero.
Cosa significa dunque? Eccolo, se non m'inganno. Se in vece della sud.ª equazio[ne]

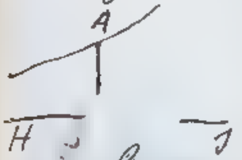



si supporrà quest'altra $y = \frac{b-x\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, ad essa spette[rà] la curva HPMI, la quale sarà immaginaria, quando abbia luogo l'altra curva GMO. Nell'ipotesi della realt[à] della curva HPMI il punto P è punto d'intersezione della curva coll'asse; ed ivi l'ordinata si annulla.
Nell'ipotesi della medesima curva HPMI immaginaria P è il punto in cui si annu[llano] le ordinate immaginarie, e questo nulla di ordinata immaginaria, sebbene per la sua relazione alla evanescente grandezza immaginaria si possa in qualche mo[do] chiamarlo di natura diversa dai zeri che danno intersezioni reali di curva coll'asse pur non ostante non sarà mai capace di alterare la natura di un aggregato di grandezze reali, cui esso si aggiungesse. Sia l'equazione $y = a + x\sqrt{-1}$. Cos'è quello che fa l'immaginario della grandezza $y$? Il termine $x\sqrt{-1}$, che si aggiunge ad $a$. Dunque, se questo non vi fosse, $y$ sarebbe reale. Distruggiamo dunque questo termine. Io non posso esprimerlo distrutto, se non scrivo $y = a + x\sqrt{-1} - x\sqrt{-1}$, ovvero $y = a + 0\sqrt{-1}$. Dunque $0\sqrt{-1}$ aggiunto ad $a$ non altera la realità del valore di $y$, e realmente quell['] espressione è identica con quest'altra $y = a$.
Una certa diversità de' zeri, se si confrontano tra loro, e non colle grandezze finite mi viene somministrata dall'analogia $ma : ma :: a : a$, nella quale dividendo, e alt[er]nando, nasce $m \times \overline{a-a} : a-a :: m : 1$, cioè sta il zero di $ma$ al zero di $a$ come m [a 1]. Propriamente dunque parlando, non si potrebbe instituire equazione tra il primo antece[dente] e il primo conseguente, facendo $ma - ma = a - a$, e supponendo m numero re[ale]. Ma se aggiungo la quantità finita $a$ da una parte e dall'altra, mi risulta $a + ma - ma = a + a - a$, cioè $a = a$, che è giustissima. Dunque, sebbene il zero di $ma$ stia al zero di $a$ :: m 1, quando aggiungo all'uno o all'altro di questi zeri una quantità finita, non resta alterato per niente il valore de' due aggregati, che sono perfettamente eguali. Supponiamo ora m immaginario. L'un zero all'altro sta[rà] come l'immaginario al reale; ma nondimeno si considererà, come se valesse l'equazione $ma - ma = a - a$. Perchè aggiungendo $ma$ da una parte e dall'altra avremo $ma + ma - ma = ma + a - a$. Certamente il primo membro non sarà altro che $ma$, perchè il zero di un immaginario aggiunto a una quantità immaginaria non altera il valore del tutto: il secondo membro non sarà altro che immaginario; perchè il zero della quantità reale $a$ nè accresce

nè diminuisce mai. Dunque anche quando $m a$ è immaginario, il zero nato dalla distruzione di questo immaginario non sarà capace di alterare per niente l'aggregato che nasce dalle quantità ad esso aggiunte, che sarà eguale all'aggregato solo delle quantità.

Concluderemo da tutto ciò, che il zero reale ci avverte, che la quantità, la quale si considera distrutta, era reale; e il zero immaginario, o piuttosto $0\sqrt{-1}$ ci avverte, che la quantità, la quale è distrutta, era immaginaria. Altra idea io non mi so fare di questa espressione $0\sqrt{-1}$, che la accennata, la quale mi par semplice e giusta, e lontana da quel misterioso, che io cerco in tutto e per tutto di sbandire dall'Algebra, e dalla Geometria.

Mi resta da ultimo una riflessione sulla integrazione della formola $dA = \frac{a\sqrt{-1}}{2} \cdot \frac{dt}{t}$. Questa integrata coll'aggiunta della costante, dà $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} l.Ct$, in cui l'arco debb'esser nullo, quando $t=-a$. Fissato l'asse HT della logistica, e AB=a protonumero, e sottangente, scrivo così l'equazione $A = \log. \frac{C^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} t^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}-1}}$, forma identica colla superiore. Quando A=0, la sud. equazione diventa




$0 = \log. \frac{C^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} \times (-a)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}-1}}$. Dunque sarà $\frac{C^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} \times (-a)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}-1}} = a$, ovvero

$C^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} \times (-a)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} = a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}$, onde risulta $C \times -a = a$, cioè $C=-1$.

onde colla sostituzione avremo $0 = \log. \frac{(-1)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}} \times (-a)^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}-1}} = \log. \frac{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}}}{a^{\frac{\sqrt{-1}}{2}-1}} = \log. a = 0$, come dev'essere. Ma se nell'altra identica $A = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. Ct$ facciamo $t=-a$; $C=-1$, ed $A=0$, abbiamo $0 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \log. a$. Dunque realmente non differiscono i valori, $\log. a$, e $\frac{\sqrt{-1}}{2} \log. a$; e tutti due son zero.

Che mal ci sarebbe a dire, che nel nostro caso tutta la logistica si riduce ai due unici punti A, a, che sono gli estremi della positiva AB, e della negativa eguale Ba? Io non veggo, che quindi nascer potesse assurdo alcuno. Ma certamente in qualunque modo si voglia intender la cosa, io non mi dipartirò mai dal credere, che $a + 0\sqrt{-1}$ sia effettivamente lo stesso che $a$, quando con una evidente dimostrazione non sia condotto a un palpabile assurdo coll'addottare una tal proposizione.

Ill.mo Sig. Conte Sig. Sig. Pron Col.mo

Ho scritto con molta fretta le succennate cose, perchè non ho tutto quel tempo, che bramerei, per seguitare ad istruirmi con comodo, nella sua dotta corrispondenza. Ella gradisca colla sua consueta bontà le mie rispettose repliche, e mi perdoni qualche involontaria lentezza in rispondere alle gentilissime sue lettere, che mi sono oltre modo preziose, e care. Mi continui la sua buona grazia, e mi creda con tutto il rispetto

Di V.S. Ill.ma

Fa. li 5 Aprile 1775

Dev.mo Obbl.mo Umil.mo Servitore
G. Franc.o de' Malfatti

Al Nobile Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

p Venezia

Treviso

…ino dalli 24. ottobre 1777. fu consegnato in Venezia al Sig. Aless. per il Sig. Ab. Amaduzzi in un inserto il Tomo 21. della Raccolta ed in esso 36. copie dell'Opuscolo Caldani di fogli 2. che montano a [illegible] ed è stato incluso [illegible]



Ill.mo Sig.re Sig.re Sig.re P.ne Col.mo

A dirla ingenuamente io non pensava più al Libro del Sig. Abb.e Pessuti, giacchè l'aveva preso ad esaminare V. S. Ill.ma. Attesi però i veneratissimi di Lei comandamenti l'ho preso per mano, ed ecco alcune poche considerazioni, che ho cominciato a farvi sopra, le quali ove da Lei vengano approvate procurerò, che in quel modo, ch'ella giudicherà sieno date alla pubblica luce insieme coll'altre, che mi restano a fare, e che mi riserbo di spedirle.

Do cominciamento alle mie considerazioni dall'esame della formola del mio sempre dilettissimo Maestro Sig.r Co: Vincenzo, e dall'esame della formola del S.r Abb.e Pessuti.

La formola generale del Sig.r Co: Vincenzo è $4\sqrt{-1}\,\log\overline{\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\cdot -a}$

Consideriamo l'espressione $\log\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$. Essa trovasi $=\frac{2a\sqrt{-1}}{z}-\frac{2a^3\sqrt{-1}}{3.z^3}+\frac{2a^5\sqrt{-1}}{5.z^5}$ &c

e posta $z=0$ sarà $\log\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}=\frac{2a\sqrt{-1}}{0}-\frac{2a^3\sqrt{-1}}{3.0^3}+\frac{2a^5\sqrt{-1}}{5.0^5}$ &c Lo che evidentemente dimostra, che quando $z=0$ il numero è immaginario, ed immaginario ancora il suo logaritmo. Dunque non è vero, che $\log\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}$ sia $=\log -1$. La ragione si è, che non può farsi $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, e così $0-a\sqrt{-1}=-a\sqrt{-1}$. Se ciò fosse vero sarebbe $0=a\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}=\overline{a-a}.\sqrt{-1}$, onde $0=0\sqrt{-1}$, ovvero $\frac{0}{a-a}=\frac{0}{0}=\sqrt{-1}$ che è impossibile.

10 a

Neu
no
su

Affinchè si verifichi che il numero divenga reale è necessario, che sia z im-
maginaria, e infatti posta $z=0$ nella formola $\angle\frac{z\sqrt{-1}+a\sqrt{-1}}{z\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}}$ si avrà
punto $\frac{a}{-a}=-1$ com'è evidente. Pertanto adunque che resta z reale, r-
sterà il numero immaginario.

Pongo adesso $z=\infty$, e la formola $\angle\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ diventa $\angle\frac{\infty+a\sqrt{-1}}{\infty-a\sqrt{-1}}=$

$$=\frac{2a\sqrt{-1}}{\infty}-\frac{2a^3\sqrt{-1}}{3.\overline{\infty}^3}+\frac{2a^5\sqrt{-1}}{5.\overline{\infty}^5}\ \&c$$

che prova parimenti essere immagina-
rio il numero, e il logaritmo, che da tale ipotesi risulta. La ragione è la
stessa addotta di sopra, cioè nel nostro caso la formola $\angle\frac{\infty+a\sqrt{-1}}{\infty-a\sqrt{-1}}$ darebbe
un numero reale, se fosse $\infty\pm a\sqrt{-1}=\infty$ che non può essere: Imperciocchè
si avrebbe $a\sqrt{-1}=\infty-\infty$, e però $\frac{a\sqrt{-1}}{\infty}=1-1$; ma $\frac{a\sqrt{-1}}{\infty}$ dà la seguente
analogia $\infty:a::\sqrt{-1}$ al quarto, che necessariamente è una quantità
immaginaria, e non reale, come sotto apparenza fa credere l'equa-
zione $\frac{a\sqrt{-1}}{\infty}=1-1$. Sarà però reale quando sia $z=\infty\sqrt{-1}$, perciocchè
svaniscono gl'immaginarj nella serie, e la formola diventa

$$\angle\frac{\infty\sqrt{-1}+a\sqrt{-1}}{\infty\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}}=\angle 1$$

Veniamo alla formola del Sig.r Pessuti. Poco mi occorre di fermarmi in

[illegible] dalli 24. ottobre 1777. fu consegnato in Venezia al Sig. [illegible] per il Sig. Ab. Amaduzzi in un' involto il Tomo 21. della Raccolta ed in esso 36. copie dell' Opuscolo Caldani di fogli 2. che [illegible]



attese le cose dette. E la sua formola $\frac{a}{n\sqrt{-1}} \log \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$. Considero la espressione $\log \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$. Essa trovasi $= \frac{nz\sqrt{-1}}{a} - \frac{nz^3\sqrt{-1}}{3a^3} + \frac{nz^5\sqrt{-1}}{5a^5}$ & quantità generalmente immaginaria. Pongasi $z=0$: avremo

$$\log \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = n.\frac{0\sqrt{-1}}{a} - n.\frac{0^3\sqrt{-1}}{3a^3} + n.\frac{0^5\sqrt{-1}}{5a^5}$$ & quantità immaginaria.

Ora il Sig.r Abb.e facendo $z=0$ ricava $a+0\sqrt{-1}=a$, e così $a-0\sqrt{-1}=a$, da che ne segue $0\sqrt{-1}=0$ che è impossibile, dunque è impossibile l'equazione $a\pm 0\sqrt{-1}=a$. Essendo pertanto in caso di $z=0$ il valore di $\log \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$ immaginario, immaginaria sarà la costante da aggiugnersi al vero integrale del Sig.r Abb.e, della qual costante ha supposto il valore $= \log 1$; ed allora solo si verificherà $\log \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} = \log 1$, o quando si prenda $a\sqrt{-1}$ in vece di $a$, o quando si prenda $z=0\sqrt{-1}$, e non $z=0$.

Eccole le poche considerazioni, che ho finora fatte: sono mal condotte, perché non ho avuto tempo di ordinarle; ma quando i fondamenti, su quali sono appoggiate, incontrino l'approvazione di V. S. Ill.ma

104

Nelu
no
lu

mi accingerò ad ordinarle, ed a metterle in chiaro. Da esse traggonsi per ciò
a prima vista mi pare, le obiezioni da farsi al Sig.r Abb.e sulle sue riflessio-
ni intorno ai Logaritmi, le quali riflessioni per ciò che ne ho potuto
gere scorrendo il Libro, mi pajono per verità inezzie. Non è però ch'io
sia per ritrattarmi, ponderate ch'io abbia bene le cose, ch'egli dice, e che
io non lo stimi sommamente. Ciò che avrebbe dovuto fare prima di
stampare il Libro, era di far vedere le d.e sue riflessioni da qualched'uno
della Professione.

Domando perdono al Riv.mo S.r Co: se ho scritto male, perchè ho scritto in fretta
quanto prima le trasmetterò le altre considerazioni, che avrò fatte, aspettan
intanto il suo giudizio, ch'io pregio e venero infinitamente. Sopra di que
le conseguenze che da quanto ho esposto derivano, mi riserbo ad esporle
altra volta. Mi raccomando della spedizione delle note stampe sulle
forza viva; e pregandola di continuarmi la stimatissima sua grazia
con tutto l'ossequio mi protesto

Di V. Ill.ma

Roma 22. Aprile 1778.

P.S. Anco domando perdono se mi sono prevalso d'altra mano avendo [?] non trovarmi bene in salute, e massimam.e di testa.

Um.o, ed Obb.mo Serv.
Petronio Mo. Caldani

...ne dalli 29. ottobre 1777. fu consegnato in Venezia al Sig. ... per il Sig. Ab. Amaduzzi in un involto il Tomo 31. della Raccolta ed in esso 36. copie dell'Opuscolo Caldani di fogli 2. che montano a £ 3.12; ed è stato incluso in Balla di Francesco Bleggi libraro di Roma

Sono state contate le £ 4 al Sig. Bernardo

Umiliss. Div. Obblig. Servid.e
Gaspare Storti

100 106

104

Nell
no

D

D.

Roma 12 Aprile 1778.

P.S. A lei domando perdono se mi sono prevalso d'altra mano a scrivere per non trovarmi bene in salute, e massimamente di testa.

Umo, ed obbmo Serv.
Petronio Mo Cald

Ill.mo Sig. Sig. Pad. Col.mo

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Colmo  107

Non è per tomi Tiraboschi, che stia aperta partita con V. S. Ill.ma ma per l'ultimo Tometto del Giornale di Modena che ha ricevuto dall'A. Bettinardo, e che in Modena vale £ 4 2 ch'io fo pagare in Modena prima che siano spediti. Mi dispiace, ch'ella di fastidio abbia tal credenza, ma non vi ho colpa, avendo fatta la parte mia quando spedisco in debito tempo: sono con vero ossequio

Di V. S. Ill.ma

Venezia 11 aple 1778

Sono state contate le 24 al Sig. Bettinardi

Umiliss.mo Div.mo Obbl.mo Servid.e
Gaetano Storti

100 106

10

104

New
no

Illmo Sig: Sig: Pad: Colmo

ue)
iesi
itmo
› ba
a
sivasi
ssto
ereua
pa
endsta
come)

ro
a
o
li
i.

non
mette.

100 106

10

Nell
no

Ill.mo Sig.r Sig.r Pad.ne Col.mo

Da quanto ebbi l'onore di scrivere ultimamente a V. S. Ill.ma vede ognuno, che prendendo la formola del Sig.r Co: Vincenzo, la quantità costante da aggiugnersi all'integrale della med.a formola non è, che $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ da moltiplicarsi pel logaritmo di una quantità immaginaria; però l'integrale dell'arco di circolo posta la tangente $=z$, il raggio $=a$, sarà $\frac{\sqrt{-1}}{2} \, l \frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \, l \frac{o+a\sqrt{-1}}{o-a\sqrt{-1}}$. ma la prima parte $= \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot \{\frac{2a\sqrt{-1}}{z} - \frac{2a^3\sqrt{-1}}{3\cdot z^3} + \frac{2a^5\sqrt{-1}}{5\cdot z^5}\}$, e la seconda trovasi $= \frac{\sqrt{-1}}{2} \{\frac{2a\sqrt{-1}}{o} - \frac{2a^3\sqrt{-1}}{3\cdot o^3} + \frac{2a^5\sqrt{-1}}{5\cdot o^5}\}$ l'una, e l'altra delle quali resta reale, dunque l'arco di circolo verrà espresso med.te questa formola per una quantità reale. La formola del Sig.r Repeti ridotta in serie esibisce essa pure una quantità reale, e la costante $=o$ reale, ma non determinandola in quella guisa, che tacitamente l'ha determinata il Sig.r Repeti, come si legge alla pag: 24 del suo libro; cioè essendo la sua formola $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \, l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ mette $z=0$, e ricava, che la costante sia $=0$, ovvero $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \, l 1 = 0$, lo che è impossibile, e tanto è vero questo suo supposto che fa corrispondere a questa espressione l'arco $u=0$ alla stessa pag: 24. Non è vero nè che sia $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \, l \frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} \, l 1$, e non è vero che sia $\frac{a}{2\sqrt{-1}} \, l 1 = 0$. Che conseguenze saranno dunque quelle, che egli ricava dei Logaritmi? In altra mia procurerò di esporle, se mi riescirà di afferrarle bene, le ragioni da rigettarsi le d.e conseguenze.

Ma tornando alla formola del Sig.r Co: Vincenzo, io dico, che il Sig.r Repeti non la ridurrà mai ad essere $= \frac{4}{\sqrt{-1}} \, l \sqrt{-1}$. Ella scusi lo sfogo, che ci metto.

che

Nel
no
su

Arrivò a fissare $-\frac{4}{\sqrt{-1}} L\,-a\sqrt{-1} = \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{a}{-a\sqrt{-1}}$ :
ma $\frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{a}{-a\sqrt{-1}} = \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{1}{-a\sqrt{-1}} + \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,a$ ; ovvero =
$= \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{1}{-\sqrt{-1}} + \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{a}{a} = \frac{4}{\sqrt{-1}} L\,\frac{1}{-\sqrt{-1}} + \frac{4}{\sqrt{-1}} \times 0$, per esser $La = 0$
e non potendo essere $\frac{4}{\sqrt{-1}} \cdot 0 = 0$, così non può egli fissare la da equazione, e commette un paralogismo. Ma per ora basti. Non so se abbia colto nel vero; dal suo grave giudizio, ch'io tengo in pregio infinito, aspetterò di saperlo. M'interverrò frattanto a tali altre considerazioni, e con tutto l'ossequio mi professo

Di V.S. Illma

Roma 15 aprile 1778

Umo, ed obbmo Serv

Petronio Mo Caldani

Datta riflessione sua esempio da lui [illegible]

che

All'Illmo Sig: Sig: Pron Colmo
Il N. H. Sig: Co: Giordano Riccati

Treviso.

...(?) Caro mio Signore, e Pn̄e

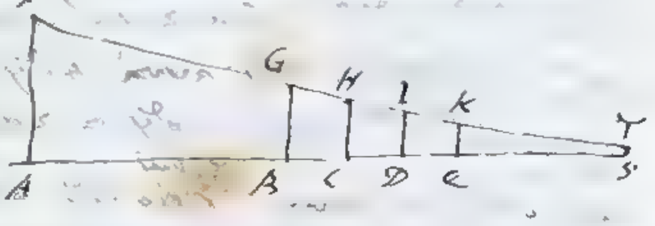
Bologna 21 Aprile 1778

...tanto temo che non ho avuto l'onore di vederlo, che

Ill:^mo Sig:^re Sig:^re Pn̄e Col:^mo

relativa al § X.

...unquenque la sua dimostrazione, sia molto ingegnosa, nulla=dimeno a me pare che la mia, quando si metta in tutto il suo lume, sia più chiara, e più semplice. Sia ZGT il ramo de' numeri decrescenti della logaritmica, in cui la suttangente, ed il protonumero AZ si eguaglino all'unità.




Posta l'assissa $AS = u$, e l'ordinata $ST = y$, avremo l'equazione $ly = u$. Si finga $AS$ trascendentemente infinita, talmente che sia $ST = y = 0$, e poscia si faccia crescere quella ordinata $ST = y = 0$ per l'elemento $BG = dy$, ed accaderà che l'assissa $AS = u$ cali per $BS = -du$. Che $du = BS$ si aguagli all'infinito lo dimostro così. Sia $CH = \frac{1}{2}dy$, $DI = \frac{1}{4}dy$, $EK = \frac{1}{8}dy$ &c. e stando $BG : CH :: CH : DI :: DI : EK$ &c. nella ragione finita di $2 : 1$, le intercette $BC$, $CD$, $DE$ &c. saranno eguali e finite. Ma continuando la predetta serie, si richiede un numero infinito di termini, accioc=chè sia l'ultimo termine $ST = 0$; dunque in $BS$ si contengono infinite intercette $BC$, $CD$, $DE$ &c. di determinata misura, la cui somma perciò $= BS = -du$ si eguaglia all'infinito; il che &c.

...ù semplicemente ancora. Nell'equazione differenziale $\frac{dy}{y} = -du$ fatto $y = 0$, avremo $\frac{dy}{0} = \frac{-du}{1}$: ma $0$ in $dy$ è contenuto infinite volte; dunque anche l'unità è contenuta infinite volte in $-du$, e quindi $-du = \infty$:

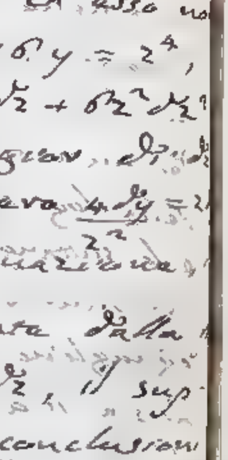
...tta riflessione sull'esempio da Lei recato per provare

che

che non sempre $\frac{dy}{0} = \infty$; mi sono accorto ch'esso non ottiene l'intento. Abbiasi l'equazione $16y = z^4$, la cui esatta differenziazione $16dy = 4z^3dz + 6z^2dz^2 + 4zdz^3 + dz^4$. Sia $z$ infinitamente maggiore di $dz$, ed in tal ipotesi si avrà $4dy = z^3dz$, ovvero $\frac{4dy}{z^2} = z dz$ e poichè $z^2 = 4\sqrt{y}$, $\frac{dy}{\sqrt{y}} = z dz$, ch'è l'equazione di cui Ella si serve. Essendo essa dipendente dalla ipotesi di $z$ infinitamente più grande di $dz$, il supporre $\sqrt{y} = \frac{1}{4}z^2 = 0$ conduce a delle false conclusioni. Quando $z = 0$, vale la formola differenziale $16dy = d$

Nel
no

In riguardo al § XXI.* Ella si è benissimo spiegata nella sua lettera; ma se considererà attentamente la costruzione si accorgerà, che bisogna far uso della integrazione $3\left(g^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}\right) =$ Arco Rag. C Tang. $-p$ $-$ Arco Rag. C Tang. $-\frac{C^2}{3 \cdot H^{\frac{1}{3}}}$ considerando i detti archi come positivi. L'arco della tangente $-p$ comincia in B, e va poscia crescendo nella ipotesi di $n = 2$ sino a divenire uguale a B O B' O' B N, a cui corrisponde la tangente $BH = -\frac{C^2}{3 \cdot \overline{H+L}^{\frac{1}{3}}}$ quando $x = L$. Ella suppone che crescendo $x$ cali $-p$ il che certamente è falso. Se $x = 0$, abbiamo $-p = BR = -\frac{C^2}{3 \cdot H^{\frac{1}{3}}}$. Aumentandosi $x$, diverrà per esempio $-p = BE$, e l'arco $= BI$, e quando l'arco pareggia il quadrante BO, sarà $-p = \infty$. Diviene la tangente positiva mentre l'arco sta dentro i limiti del quadrante e del semicircolo, a cui si riferisca $p = 0$. Quando l'arco supera il semicircolo, ed è minore dei tre




quadranti

Ill. Conte mio Signore, e Prõne

Bologna 21 Aprile 1778

tanto tempo che non ho avuto l'onore di scrivere, che [illegible]

113

quadranti la tangente è sempre negativa, la quale si tramuta in positiva qualora l'arco ecceda i tre quadranti, ed è minore del circolo. Finalmente torna negativa la tangente, quando l'arco supera il circolo $BOB'O'B$, sintantochè giunga alla misura $BOB'O'BN$ corrispondente alla tangente $-p = -\frac{c^2}{3.\overline{H+L}^{\frac{1}{3}}}$ relativa ad $x = L$. nella supposizione, che sendo $n = 2$, la curva a cui si adatta la corda sia fornita di due ventri, ed abbia un solo nodo. Dalle cose dette si raccoglie assere l'ordinaria Arco Rag. (Tang. $-p$ $-$ Arco Rag. (Tang. $-\frac{c^2}{3.H^{\frac{1}{3}}}$ $= B7 - B1 = 17$, quando si ponga $BC = -p$, ed in tal guisa io ho la quantità positiva $17 = 3.\overline{q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}}$ grandezza altresì positiva. Se integrassi alla sua maniera, troverei $3.\overline{q^{\frac{1}{3}} - H^{\frac{1}{3}}} = -17$, cioè a dire una quantità positiva eguale ad una negativa. Ella vede dunque la necessità di considerar gli archi $B7$ come positivi, benchè da prima le tangenti $BC$ siano negative. Le sue belle riflessioni concernenti alla controversia col Sig.r Ab. Dessuti non le ho ancora maturamente considerate; e quindi le riservo per la settimana ventura. Ella risponda pure con tutto il comodo alle mie forse troppo frequenti lettere, le quali per altro mostrano la stima grande ch'io fo della sua dottrina, e sincerità, ed intanto la prego a considerarmi quale mi dichiaro col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma

Treviso 17. Aprile 1778.

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Ser.r Vero
Giordano Riccati

114

...Col.mo mio Signore, e P.rone

Bologna 21 Aprile 1778

È tanto tempo che non ho avuto l'onore di scriverle, che
quando mi fo ad ottenere l'occasione di scriverle da due cose, che
...gli avrò anche siccome, che mi levano tanto più grave
...tanto più è che ne manco. La prima per altro è di dare
un'incomodo per servire un Cavaliere mio amico, che
... quanto bene sia stato favorito da Lei in simil bi-
sogno, ed è che mi provveda di quattro pezzi di co-
...ime, fornimenti, e di quattro varchette comuni
...troppo leggeri della stessa perfetta qualità. L'altra è
per dirgliela una stampa colla quale un mio caro
amico e valente mi ha voluto fare una sorpresa, e che
...me in essa Lei nomina l'immortale Vincenzo Ric-
cati ho veduto per questo che mi possa esser permesso di
farla avere al Fratello di sì grand'uomo, non stante
che un tal scritto non dovesse esser io quegli che lo distribuisse
fuori. Difatti benche V.S. sia tanto poco che è pubblicato,
quanto a me V.S. l'ho fatto avere ad alcuno, e a Lei non

Lei, che ... non possa vandare immaginaria la quantità
di $0\sqrt{-1}$ ... Le ragioni, che adduce, mi sembrano con-
$a+0\sqrt{-1}$
vincenti, ed essendo per comun opinione di tutti
gli analisti $a^2+x^2 = \overline{a+x\sqrt{-1}}\cdot\overline{a-x\sqrt{-1}} = a^2 + ax\sqrt{-1} + x^2 - ax\sqrt{-1}$
ne segue per conseguenza doversi trascurare la quan-
tità $ax - ax\sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}$ ... ottimamente riflette,
che

ia; imo ifi; e ... maria parte !, e anche carta e de V. ella e i fficoltà ster lanno ; detto a formola $+0\sqrt{-1}=a$ prendono

stato fin qui irresoluto a mandarlo, ma il motivo av-
nato innanzi, e la congiuntura buona mia mi ha determina-
to a farlo, persuaso che averà piacere che ci vanno ... contribuirlo all'esquisita confidenza che ho in Lei. ...
lasciando perciò mi dia nuove di sua salute, de' suoi
studii, di quella tal stampa, che fu cominciata in
Brescia; mi ricordi buon servitore al S. Cav. di
Aprivo, et al Compare Figlio, e raccomandandomi
amor suo, mi confermo sempre di essere con infi-
nita, et obligo
Di Lei Mio S. Compare

Divotissimo et Obbligatissimo Se...
Giac.o Mazzucchi Brigelli

ue;

uno

esi;

do piacer

fornita.

sitiva

ue

ate

gina= ropinaria

ma, le parte

ri,

ri'anche

rarte

a dell'

nda

e è

ifficoltà

ter

lanno

;

Lei; che ...

di $o\sqrt{-1}$ non possa rendere immaginaria la quantità ... prodotto

$a+o\sqrt{-1}$. Le ragioni, che adduce, mi sembrano con= a formola

vincenti; ed essendo per comun opinione di tutti $o\sqrt{-1}=a$

gli analisti $a^2+x^2 = \overline{a+x\sqrt{-1}} \cdot \overline{a-x\sqrt{-1}} = a^2 + ax\sqrt{-1} - ax\sqrt{-1} + x^2$ prendano

ne segue per conseguenza doversi trascurare la quan=

tità $ax-ax\sqrt{-1} = o\sqrt{-1}$. Ella ottimamente riflette,

che

Al nobil Uomo
Il Sig. Conte Giordano Riccati
Venezia
con rondolo franco. S. Trevigo

C. Amo Sig.re Sig.re Prõ Colmo.

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Colmo 117

Mi piacere, che sia restata persuasa; essere la logistica fornita di due rami reali eguali spettanti alle ordinate positiva e negativa, e di infinita coppia di immaginari. Il Eulero, e l'Ab. Rossuti scioglendo il problema, che determina i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo, credevano di aver convinta di falsità la sentenza di Gio. Bernoulli, che asseriva competere lo stesso logaritmo reale a due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo; perchè trovavano i logaritmi di $+a$ diversi da quelli di $-a$. Io faccio vedere, che la loro soluzione non è compilata, e che quando essa sia ridotta alla total estensione, di cui è capace, gli stessi logaritmi, uno reale, e gli altri immaginarj convengono a $\pm a$. Da ciò ne segue, che quell'argomento, che giudicavano contrario al Bernoulli, e favorevole al Leibnitz, ridotto a dovere, conchiude tutto a rovescio.

Esaminata maturamente la sua scrittura, convengo con Lei, che $a + 0\sqrt{-1}$ sia uguale ad $a$, e che l'aggiunta di $0\sqrt{-1}$ non possa rendere immaginaria la quantità $a + 0\sqrt{-1}$. Le ragioni, che adduce, mi sembrano convincenti; ed essendo per comun opinione di tutti gli analisti

$$a^2 + x^2 = \overline{a + x\sqrt{-1}} \cdot \overline{a - x\sqrt{-1}} = a^2 + ax\sqrt{-1} - ax\sqrt{-1} + x^2$$

ne segue per conseguenza doversi trascurare la quantità $\overline{ax - ax\sqrt{-1}} = 0\sqrt{-1}$. Ella ottimamente riflette,

che

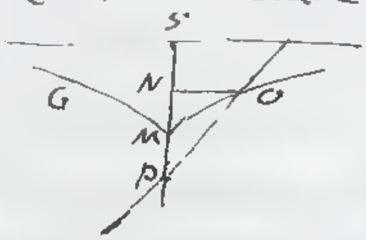
e serie;
animo
veesi;
me
ragunaria
le, parte
$=$, C,
impiandi
e, parte
nda dell'
Com.
'ormola
atore è
tra difficoltà
di poter
ali fanno
spese
prodotto
a formola
$+0\sqrt{-1} = a$
comprendano

0 che se voglio ridurre reale la quantità immaginaria
$\hat{a}+ax\sqrt{-1}$, bisogna che levi il termine immaginario
$ax\sqrt{-1}$: ma questo termine si leva mediante la sottra-
9 zione $\hat{a}+ax\sqrt{-1}-ax\sqrt{-1}$; dunque $\hat{a}+o\sqrt{-1}=\hat{a}$; il che
Ne avverte ch'io posso anche scrivere $\hat{a}+ax.\overline{\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}=$
no $\hat{a}+ax.o=\hat{a}+o=\hat{a}$, e far sì che sparisca la
grandezza immaginaria $\sqrt{-1}$.
Ancor Ella considera darsi due zero, uno reale $=o$,
e l'altro immaginario $=o\sqrt{-1}$, e chiama il primo
zero di quantità reale, ed il secondo zero di quan-
tità immaginaria. Sia $p$ la semicirconferenza
circolare del raggio 1, che si assuma come protonu-
mero, ed $m$ possa esprimere qualunque termine
della serie $o$, $\pm1$, $\pm2$, $\pm3$ &c., e si avvererà la
la formula $li=mp\sqrt{-1}$, e chiamato $A$ un arco di
circolo del detto raggio, uguale a $\frac{1}{2\sqrt{-1}}li$, avremo $A=\frac{1}{2\sqrt{-1}}li=\frac{1}{2\sqrt{-1}}.mp\sqrt{-1}$
Suppongasi $m=o$, e ne risulterà $li=o\sqrt{-1}$, $A=o$.
Or ecco le due specie di nulla. L'arco $A$ è un nulla
reale e $li$ come dedotto dalla rettificazione del circolo, è un
nulla immaginario, essendo generalmente immagi-
naria la quantità $mp\sqrt{-1}$. Ho detto come dedotto
rettificazione del circolo, perchè non può negarsi
essere $li=o$, escludendo la natura di proto-
numero. E qui dee notarsi poter andar congiunto
il

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo



il nulla reale, ed il nulla immaginario, il che addiviene nel logaritmo del pretonumero, che si può aguagliare all'uno, e all'altro nulla. Anche l'ordinata, che corrisponde al punto estremo del diametro circolare s'appropria tutti e due i nulla; ma in grazia solo del nulla reale il circolo passa pel detto punto. Lo stesso accade nel punto M della concoide




GMO, nel quale, quando $SN = x = SM = a$, si ha l'ordinata $NO = y = \overline{b-x}\sqrt{a^2-x^2} = \begin{cases} 0 \\ 0\sqrt{-1} \end{cases}$; ed intanto il punto M appartiene alla curva, in quanto che nel detto punto l'ordinata $y$ si aguaglia al nulla reale. Non così interviene nel polo P, quando $SN = x = SP = b$; imperciocché in esso è soltanto $y = 0\sqrt{-1}$, e per tal ragione la curva pel nominato punto non passa.

…i Matematici non avessero in mira che la verità, la mutua loro corrispondenza riuscirebbe utile; perché l'uno sarebbe sempre pronto a cedere alle convincenti ragioni dell'altro. Così è avvenuto presentemente, essendo io restato persuaso che $0\sqrt{-1}$ aggiunto ad una quantità reale non la cangi in immaginaria, ed Ella avendo ricevuto le due specie di nulla reale, ed immaginario, o pure com'Ella ama meglio di chiamarlo di quantità reale, o immaginaria. Mi raffermo con pienissima stima. Di V. S. Ill.ma

Treviso 22 Aprile 1774 Divot.mo Obbl.mo Serv.re Vero
Giordano Riccati

Sig. Gianfrancesco de' Malfatti Ferrara

106

120

Ne
no

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron Col.mo

Ripensando io alle note formole del Sr. Co: Vincenzo, ed del Sr. Abb.e Pessuti, ed alle serie, nelle quali si convertono l'espressioni, che le rappresentano, mi è caduto in animo qualche difficoltà, che potrebbe farsi, onde nè l'una, nè l'altra dovesse riceversi; ed a V.S. Ill.ma mi rivolgo per averne il suo grave giudizio.

La formola del Sr. Co: Vincenzo è $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,{-a}$. Ora è certo, che $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ è reale, ma immaginaria $-\sqrt{-1}\,\ell\,{-a}$, quando non si voglia immaginaria $\ell\,{-a}$; dunque l'arco di cerchio verrebbe espresso da una quantità parte reale, parte immaginaria. Così essendo la formola del Sr. Abb.e Pessuti $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} + \frac{a}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,1$, la quantità $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ è reale, ma la quantità $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,1$ è immaginaria; dunque anche per questa formola l'arco di cerchio verrebbe espresso da una q.tà parte reale, parte immaginaria. Per vederlo più chiaramente sia la prima parte della formola del Sr. Co. Vincenzo, cioè $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,p\sqrt{-1}$; la seconda parte $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,{-a} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,m$. Essendo $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,p\sqrt{-1} = \ell\,\overline{p\sqrt{-1}}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$, ed essendo $\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\ell\,m = \ell\,\overline{m}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}$, sarà la formola $\ell\,\overline{p\sqrt{-1}}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} - \ell\,\overline{m}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}} = \ell\,\frac{\overline{p\sqrt{-1}}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}}{\overline{m}^{\frac{1}{2}\sqrt{-1}}}$; ma il numeratore è reale, il denominatore è immaginario, dunque l'arco di cerchio verrà espresso da una q.tà immaginaria.

Lo stesso discorso vale per la formola del Sr. Pessuti. Sarà forse una inezia questa difficoltà ma il mio corto ingegno non trova risposta da dileguarla. Mi fu poi di sperare di poter rinvenirla il valore delle d.e formole, che si ricava mediante le serie, le quali fanno vedere, che assolutamente le costanti da aggiungersi agl'integrali debbono essere immaginarie, moltiplicate, o divise per altre immaginarie, onde ne nasca un prodotto reale da aggiungersi all'integrale. Ciò sempre più fa vedere, che rispetto alla formola del Sr. Co: Vincenzo, quando $z=0$, non dee prendersi $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, nè $a+0\sqrt{-1}=a$ rispetto alla formola del Sr. Pessuti, come già le accennai. Quando così non si prendano

le formole, nascono appunto q.tà costanti immaginarie, che moltiplicate, o divise per $\sqrt{-1}$, rendono una q.tà reale da aggiugnersi all'integrale. Quindi è, che dice benissimo il Sig. Co: Vincenzo, che non si sa con qual giro di calcolo sia arrivato il Sig. Bernoulli a dimostrare essere la circonferenza al diametro, come $\ell -1 : \sqrt{-1}$, ma non posso non aver timore della determinazione della costante, che il med.o Sig. assegna al suo integrale, mettendo $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$. Questo dichiara quanto grande sia il pericolo, a cui si va incontro trattando quantità immaginarie, ed io ho gran dubbio, che non sieno pericolati uomini sommi, de' quali ammiriamo ora bellissime formole da essi inventate, ma che forse non sono esenti dal paralogismo. Così, chi sa, se la formola $\frac{a^2dz}{aa+zz}$ possa veramente risolversi in $\frac{\frac{1}{2}a^2dz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}a\,dz}{a-z\sqrt{-1}}$? Riducendo queste due frazioni allo stesso denominatore trovasi $\frac{a^2dz - \frac{1}{2}a^2dz\sqrt{-1} + \frac{1}{2}a^2dz\sqrt{-1}}{aa+zz}$. Ma è dessa $= \frac{a^2dz+0}{aa+zz}$, ovvero è dessa $= \frac{a^2dz+0\sqrt{-1}}{aa+zz}$? Se si eguaglia alla prima, le cose van bene, ma se si eguaglia alla seconda, come andranno? Per altro una debb'esser vera, e l'altra falsa. Ma per una parte questi son punti troppo difficili per la poca capacità mia, onde svilupparli, e dichiararli in breve tempo oltre l'esser distratto in altre cose, e per l'altra veggo, che merito la taccia di ardito a pronunziare tale proposizioni.

Riceva intanto V.S. Ill.ma quello, che ho esposto sulla determinazione della costante della formola del Sig. Co: Vinc.o, e di quella del Sig. abbe. Pesuti, e si degni di soffrire quest'incomodo nell'illuminarmi, che il Sig. Co: Vinc.o son certo, che per sua benignità avrebb'egli sofferto volentieri; e pregandola della continuaz. della pregiatiss.a sua grazia, e di onorarmi de' suoi veneratissimi comandi con tutto l'ossequio mi protesto

Di V.S. Ill.ma

Roma 13 Ag.to 1778

Umil.mo, ed Obblig.mo

Petronio M.a Caldani

[illegible]

auimi

All' Ill.mo Sig.r Sig.r Pn.e Col.mo
Il N. U. Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso.

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo

Dopo di aver esaminato la formola del Sig.r Co. Riccati, e quella del Sig.r Abb.e Rossetti in que' pochi ritagli di tempo, che ho potuto procacciarmi, le quali formole riguardano la proporzione data dal Bernoulli fra la circonferenza, ed il diametro di $L-1 : \sqrt{-1}$, mi è [illegible] Sig.r [illegible], perchè giunto all'altra espressione della circonferenza $\frac{2a}{\sqrt{-1}}$ in $L\sqrt{-1}$, si contenta solamente di ridurla ad essere $\frac{2a}{\sqrt{-1}} L-1$. E perchè non prosegue, e non la riduce all'espressione $\frac{a}{\sqrt{-1}} L1$, quantità, che sta al diametro $2a :: L1 : 2\sqrt{-1}$. Ma vengo ora ad accennare a V.S. Ill.ma alcune riflessioncelle sopra la Teoria del d.o Sig.r Rossetti intorno ai logaritmi. Pretende egli, che a qualunque numero corrisponda una infinità di logaritmi, e per dimostrarlo si serve appunto della formola $\frac{a}{2\sqrt{-1}} L\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$. Uguaglia $a=1$, $z=0$, e ricava $\frac{1}{2\sqrt{-1}} L1$, da che deduce pel numero $=1$ infiniti logaritmi, giacchè la tang.e $z=0$ corrisponde ad archi infiniti. Ma da quanto si è detto è chiaro, che il Sig.r Rossetti sbaglia credendo, che fatta $z=0$, $a=1$, la formola diventi $= \frac{1}{2\sqrt{-1}} L1$. In primo luogo questa formola non si può ammettere, perchè essendo $\frac{1}{2\sqrt{-1}} L1$ quantità immaginaria, sarà necessariamente immaginario anche l'arco, che rappresenta, ed a nessun arco immaginario può mai corrispondere la tang.e $= z = 0$ reale. In secondo luogo che la formola non sia quale il Sig.r Rossetti la ricava, ben resterà convinto dal ridurre in serie $\frac{1}{2\sqrt{-1}} L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}}$, dalla quale rileverà non esser altrimenti immaginario l'arco, ch'esso rappresenta. Laonde tutte le conseguenze, ch'egli deduce dal falso supposto, che sia $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L1$ vengono ad esser false. Vediamo ora cosa succede senza tal supposto. Trovandosi $\frac{1}{\sqrt{-1}} L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}} = 0$, ed essendo $0 = L1$, sarà $\frac{1}{\sqrt{-1}} L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}} = L1$, ed $L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\, L1 = 2\cdot 0\sqrt{-1}$; ma secondo il Sig.r Rossetti $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}}$, indicando $m$ un qualunque numero intero positivo, o negativo

10

124

[illegible] per le conseguenze; dunque sarà sempre $mp = 0 = L1$

[illegible] $mp\sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}\,L1 = L\frac{1+0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}}$; cioè assegnando per $m$ tutti

i numeri interi positivi, o negativi, avremo [illegible] $\sqrt{-1} = 2 \cdot 0\sqrt{-1}$ [illegible] $L1 = \ldots$

[illegible] Che belle conseguenze! Ma proseguiamo. Passa il Sig.r Pessuti a deter-

nare il logaritmo d'un numero negativo, ed a ciò si serve della formula $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$

che esprime il semiquadrante, dicendo che siccome alla tang.e $z=1$ non

corrisponde solamente l'arco di 45°, ma corrispondono archi infiniti della

forma $45° + mp$, così sarà $45° + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L\sqrt{-1}$. Supponiamo dunque

$m=1$: sarà $45° + \frac{2}{\sqrt{-1}} L\sqrt{-1} = 45°$; ma pel Sig.r Pessuti $\frac{2}{\sqrt{-1}} L\sqrt{-1} = 18$

dunque $45° + 180° = 45°$. Che conseguenze son queste!

Per ora basti. Al finissimo di Lei discernimento rimetto queste semplici

riflessioni, e tutto me stesso pregandola della continuaz.e della sua pro

Di V.S. Ill.ma

Roma 24 aprile 1775

Umo, ed Obbmo Se

Petronio M.a Cal

Sig.r Giacomo mio Sig.re a Roma 

All'Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

Il N. H. Sig.r C. Giordano Riccati

Treviso

Sig.r Giacomo mio Sig.re e Amico

Treviso 30. Aprile 1776.

Ho inteso dal Sig.r Cav.r di Rovero la spontanea sovrana aggregazione della degnissima di Lei Famiglia alla Nobiltà Bolognese fatta da cotesto Eccelso Senato. Riguardando il sommo interesse pe' suoi vantaggi, non posso perdonare salvochè alla sua distinta modestia, che non me li abbia partecipati. Io però mi congratulo non tanto con Lei, quanto con cotesta illustre Nobiltà del prezioso acquisto che ha fatto. L'Orazione di cui mi ha favorito, mai ti ho però così divorata, e veramente il Sig.r Ab. Brati ha trattato il suo argomento con eloquenza, ed ha toccato degli ottimi punti [illegible] quattro pezzi di corona per finimento le potrei spedir subito, ma non così le quattro vacchette, perchè presentemente, a cagione dell'esatta fattura, non ne vengono di perfezionate, e conviene [illegible] dal lavoro di ultimarsi compimento. Alla Lonigiana [illegible] sa debba [illegible] tosto [illegible] coll'occasione [illegible] colle vacchette.

Io grazie a Dio godo buona salute, se non che sono afflitto per la lunghissima, e tormentosa infermità della Co. mia Cognata cominciata li 23 Ottobre, e che dura tuttavia con pochissima speranza, che [illegible] mettevano [illegible] accompagnata da convulsioni, che hanno prodotto degli gravissimi effetti, perchè benchè sia senza febbre

Dev.mo Obblig.mo Servitor Vero
S. Franc.o Malfatti

febbre, mangi, e dorma competentemente; sta tutto il giorno taciturno, ed appena proferisce parola.

Lo Stampatore di Brescia ha burlato bruttamente il Sig. Co. Zanaroli, abbandonando l'edizione dopo averla incominciata.

Il Sig. Ab. Cassuti ha scritto l'estratto delle Istruzioni Analitiche di mio fratello, che si legge nel Giornale di Modena, nel quale cogli elogi unisce qualche censura. L'Ab. Vincenzo gli indirizzò una Lettera, in cui rendeva conto delle ragioni, che l'avevano indotto ad operare come avea creduto espediente, e nello stesso tempo l'avvertiva di alcuna cosa, che nell'estratto aveva notate. Non avendogli mai risposto il Sig. Cassuti, ho giudicato espediente dopo la morte di mio fratello di stampar la sua Lettera nel Tom. 30 della Raccolta del P. Mandelli. Ha ciò impegnato il Sig. Ab. Cassuti a pubblicare in Livorno l'anno scorso 1777. le sue Riflessioni Analitiche sopra la predetta Lettera, le quali a dir vero non sono scritte con maniera molto obbligante. A queste Riflessioni ho disteso la Risposta, che fingo scritta da uno Scolare di mio fratello, in cui ho procurato di usare la maggiore modestia. Gli do ragione dove credo che l'abbia, e se ha preso degli sbagli li noto, ma con modo rispettoso per insegnargli come le controversie letterarie vanno trattate. Mi lusingo di aver

aver posto in piano lume la tanto dibattuta quistione dei logaritmi dei numeri negativi, facendo vedere che quell'argomento, con cui l'Eulero ed il Bassuti credono di decidere la controversia a favore del Leibnitz, quando sia maneggiato a dovere, conchiude tutto il contrario.
Sig. Cav. di Rovero, ed il Contino suo figlio le fanno i loro complimenti, ed io colla dovuta costantissima stima mi dichiaro

Di Lei Sig.r Giacomo Stimat.mo

Nobil Uomo Sig.r Giacomo Mariscotti. Bologna

Divot.mo Obbl.mo Serv.r V.o
Giordano Riccati

Di V.S. Ill.ma

Dev.mo Obblig.mo Servitor Vero
S. Franc.o Malfatti

Sig. Conte mio Stimo

Bologna 5 Maggio 1778

Negli innumerevoli ... della pregiatissima sua ho un nuovo

Illmo Sig. Conte Sig. Sig. e Prone Colmo 129

Io devo rispondere a due gentilissime lettere di V. S. Illma che mi sono
giunte nello stesso Ordinario, perche forse la prima sarà restata
cinque o sei giorni inosservata nello scaffale di questa Posta.
La ragione che Ella adduce nella prima, perche qualche volta $\frac{dy}{0}$ non
sia una quantità infinita, è giustissima, ma però è sempre vero,
che dalla semplice inspezione di un'equazione differenziale che
mi nasca dalla soluzione di un Problema, io non potrò giudicare
se al caso, che mi risulti, in una ipotesi, la formola $\frac{dy}{0}$, sia essa pro
un infinito; e questa è stata unicamente la mia proposizione.
Veggo per altro, non essere necessario d'inserire altra cosa nella sua
Dissertazione, fuorche le correzioni da lei mandate, lasciando, che sup-
plisca il lettore a quelle maggiori dilucidazioni, che Ella poscia
mi è andata scrivendo: la qual cosa io farò esattamente, tosto che
abbia l'avviso di allestire lo scritto, per consegnarlo alla stampa
Ho piacere, che per lei pure ogni faccia un zero della sua propria indole,
incapacissimo di alterare i valori delle quantità o reali o immaginarie
che ad esso si aggiugnessero; e desidero che il Sig. Pessuti somministri
a lei altra materia, onde salvar possa dagli attacchi dell'Abate le Teorie
del carissimo Fratello, la cui memoria sarà sempre per me preziosa
e cara al maggior segno. Desidero l'onore de' suoi comandi,
e con sincerissimo rispetto, e distintissima stima mi protesto

Ferrara li 5 Maggio 1778

Di V. S. Illma

Devmo Obligmo Servitor Vero
G. Franco Malfatti

è ... ù ... la ... ra. ... attez. ... capere. ... lle ... vero ... vuole ... pre. ... ese. ... Servitore ... gna

10   124

130

N
no

Ill.mo mio Sig.re

Bologna 5 Maggio 1778

Negli umanissimi sentimenti della pregiat.ma sua ho un nuovo

é
a
la d-za:
atteg-
apere.
lla
ra
vero
o vola
re
pre-
ta.
o.
rá
té

Servitore
gna

Ill.mo Sig.r Conte mio Sig.re

Bologna 5 Maggio 1778

Negli innumerevoli sentimenti della pregiat.ma sua ho un nuovo
argomento della sua bontà verso di me, ed un nuovo argomento
delle mie obbligazioni a tutta quanta la dignissima Casa Vé
...ri. Non entrerò in questo particolare perchè avrei troppo da
dire, ma sarà sempre però la Casa Vizzani un oggetto della mia
più sincera e rispettosa riconoscenza finchè viva.
Avendo il pensiero che subito si è dato per favorirmi nella
commissione de' corami, e vacchette, ma non vi è ~~...~~tanta
fretta che non si possa approfittare di unire nella spedizione l'uno
e l'altro capo; sicchè quando solo saranno in ordine le vacchette
gusterò le sue grazie.
Mi consolo che sia in ottima salute, e prego di cuore che
Dio gliela conservi lungamente. Mi dispiace bensì lo sentito
in me la nuova in riguardo alla S.ra Contessa sua Cognata.
Voglio vedere d'entrarne in discorso con qualcuno di questi
Professori degli incomodi di questa Dama, ma v'è sempre
da sperar poco dai suggerimenti di questi Signori; particolarmente
che dovrebbero saper più degli altri, e per questo si può essere
...parati, se nella premura che ciascun è della propria salute, si

e sa: obbligaz: rapure. lea nero volea pre: ca.

Um.o Dev.mo Obb.mo Servitore
AMo Lorgna

vadano sentendo.

Sento l'Istoriella del S.r Ab.te Pezzuti: davvero [illegible] tori delle cose, e così generalità non si possono amare più quello che domandi la carità cristiana. Vorrebbero esser [illegible] quelle che ha dato, e dà la Casa [illegible], che al sapere [illegible] giungono le altre qualità del uomo onesto, e sociale, [illegible] ra le scienze, e i loro professori si concilierebbero la debi~~ta~~ ~~[illegible]~~ [illegible] per troppo non hanno.

Al S.r Co.te di Rovero, e al S.r Conone figlio i miei ossequi; e [illegible] ringraziamenti, e senza più mi creda che sono con pien[illegible] ma stima, e riconoscenza

Di Lei S.r Conte [illegible]

Dev.mo ed Obb.mo [illegible]
Giac.o [illegible]

e ra:

obbeg:

sapere.

delle

Serie ne in vero

Sum tavola

pre:

olo.

Dev.mo Obb.mo Servitore
[illegible] Lorgna

5

Al nobil uomo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia Treviso

Ill.mo S.r S.r Pron. Col.mo

mi prendo la libertà di avanzarle una piccola medita-
zione analitica, che ho compiuto d'imprimere, in attestato della stima che fo de' suoi talenti, e del suo sapere.
Tra le altre cose pregola a riflettere sull'articolo delle Serie divergenti, e vegga se m'è riuscito di mettere in vero lume quest'intralciato affare, cui non ha abbastanza svolto il per altro immortale Eulero.
Pregandolo poi a continuarmi l'onore di sua grazia preziosa, con particolar divozione, e rispetto mi protesto.

Verona 7. Maggio 1778 di V. S. Ill.ma

Um.o Dev.mo Obb.mo Servitore
Ant.o Cagnoli

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo
Il Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso

Con un Libro

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo 135

Treviso 12. Maggio 1776

Nello stesso giorno, in cui sono partito il Sig. Lorenzo M.r ricevei la gentilissima sua in data degli 11, e dei 13 dello scorso mese di Aprile. Me le professo sommamente obbligato per l'interesse, che si prende nella controversia fra mio fratello, ed il Sig. Ab. Bassuti, col quale per altro, che mostra di essere di un carattere assai piccante, bisogna studiare di non mettere il piede in fallo. La quantità $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$, quando $z = 0$, è senza dubbio $= -1$. Imperciocché $\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}} = -1$; ma $a\sqrt{-1} = 0+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1} = 0-a\sqrt{-1}$; dunque $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}} = -1$, il che nasce. Il provare essere nella ipotesi di $z = \infty$ differentemente $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = 1$. Pongo $z = \frac{a}{0}$; e fatta la sostituzione trovo $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$: ma il nulla è del pari positivo, e negativo; dunque posso scrivere anche così $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = \frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}} = 1$. Ho tenuto questo metodo per dimostrare $\frac{a\pm 0\sqrt{-1}}{a\pm 0\sqrt{-1}} = 1$, senza decidere la questione se $a\pm 0\sqrt{-1}$ sia quantità reale, o immaginaria. Credeva ancor io, che il $0\sqrt{-1}$ aggiunto ad una quantità reale, la rendesse immaginaria

immaginaria, ma mi sono ben presto accorto del mio
inganno. La quantità $2+a\sqrt{-1}$ diventava reale
qualora io levi il termine immaginario $a\sqrt{-1}$.
Ora questo termine si leva sottraendolo da $2+a\sqrt{-1}$
onde si abbia
$2+a\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}=2+0\sqrt{-1}$, dunque $2+a\sqrt{-1}=2$,
&c. Il perché resta stabilito che $a\sqrt{-1}$ non abbia
vigore aggiunto o detratto da cangiare in immagi-
naria una grandezza reale.

Troviamo in altra guisa essere $\frac{2+a\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}=5$, quando
$z=\infty$. Chiamata $p$ la semicirconferenza circolare del raggio
i tre archi $0$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$ formano una serie aritme-
tica. Essendo generalmente l'arco di circolo $=$
$\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l{-}a\left(\frac{2+a\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}\right)$, si trovava l'arco nullo $=$
$\frac{\sqrt{-1}}{2}\, la$, il semiquadrante $=\frac{1}{4}p=\frac{\sqrt{-1}}{2}\, l{-}a\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)$

Se gli archi $0$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$ compongono una serie
aritmetica, i numeri di cui essi archi sono loga-
ritmi dovranno formare una serie geometrica
sono agli archi proporzionali
Facciasi pertanto come $a : -a\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) :: -a\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right)$
$: \frac{a^2}{a}\left(\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}-1}\right)=a$, che sarà il numero
relativo al quadrante $=\frac{1}{2}p$; donde che in tal
caso si avrà $-a\left(\frac{2+a\sqrt{-1}}{2-a\sqrt{-1}}\right)=-a$; e conseguentemente

137

$\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ = , come devesi dimostrarsi.

Osservi Ella il giro del calcolo delli Ab. Vincenzo. Chiamato u l'arco di cerchio, il cui raggio = a, che sia alcunsi sottotangente, è proporzionato della logistica, perviene alla formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right) - A$

Per determinare la costante A riflette essere u = 0, quando z = 0 : ma in tal caso $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} = -1$ : dunque $A = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l.-a$, e per conseguenza $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, la\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right) - la$.

Ecco la qual cosa nella ipotesi di z = 0 avverrà $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot l.-a - l.-a = \frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot 0$. Anche per sentenza $\frac{\sqrt{-1}}{2} \cdot 0 = 0$ ... è adunque di mio .... di nulla, ciò è di uopo avvertire essere due specie di nulla, il nulla di quantità reale, ed il nulla di quantità immaginaria. Essendo generalmente ... $la\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right) - l.-a = \frac{2u}{\sqrt{-1}} = -2u\sqrt{-1}$, ... quantità immaginaria ... si annulla quando u = 0, ... $= -2u\sqrt{-1}$, ... e quindi ... ad un nulla reale. E dovrà essere, posto il ... $= a$ ... $la\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right) - l.-a$ ... $l.-a\left(\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ ... nella ipotesi di z = 0. Ora ... dal proporzionato ... di ... logaritmo. ... infiniti

10.

136

e fra questi dei due nulla, reale, e immaginario, cioè infiniti valori $\pm p\sqrt{-1}$, ~~&c.~~ il secondo dei quali conviene nel problema, che abbiam per le mani onde ne risulta $w = \sqrt{-1} \times \pm 0 \sqrt{-1} = \pm 0$

Problema in cui si propone il Sig. Riccati di determinare tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo, egli lo sciolse imperfettamente riducendolo alla totale estensione, di cui è capace, se ne deduce esser vera la sentenza Bernoulliana, che a due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo competono i medesimi logaritmi. S. Ella prenderà ad esaminare il detto Problema, si convincerà della verità della mia asserzione.

Sino dalli 26. Ottobre 1771 fu consegnato in Venezia al Sig. Catelli per il Sig. Ab. Amaduzzi in un involto il Tomo 31. della Raccolta, ed in esso 361 copie dell'Opuscolo di Lei di foglio che monta a £ 3:11 ed essendo incluse in balla di Francesco Maggia librajo di Roma. Ella dunque ricerchi il Sig. Ab. ed il detto Librajo, e procuri di ricuperare le dette copie. Sono col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma

Ill.mo Sig. Giovanni M.a Calderoni Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo 

L'Ab. Rezzini non entra più per nulla nel Giornale di Modena da molto tempo, cioè dappoichè gli autori dell'Efemeridi di Roma non vollero più seguirle dopo il tomo VI. Può Ella dunque mandar la sua risposta a ciò ch'egli ha replicato contro il suo Sig. Fratello, che sarà senz'altro stampata nel tomo XV. Nel XIII. è stampata la sua prima lettera al Sig. Con. Tenaroli; nel XIV. che si sta ora stampando, si stamperà la sua seconda lettera, e nel XV. la sua risposta all'Ab. Rezzini. Qualunque volta vorrà Ella metter qualche sua cosa nel Giornale, la può mandare, persuasa che i Giornalisti si stimano onorati quando Ella favorisce di mandar qualche sua cosa. Mi comandi se posso in alcuna cosa servirla mentre con tutto l'ossequio mi confermo

Di V.S. Ill.ma

Modena 9. Maggio 1772.

Dev.mo ed Obbl.mo Servitore

Domenico Troili

MODENA

All' Ill.mo Sig.re Sig.re Pad.ne Col.mo

Il Sig.re Con. Giordano Riccati

Venezia per Trevigo

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.

Sugli la maniera con[...]
[...]zione favorevolm[...]
nore Vacchere mi ric[...]
[...]pera, e soddisfazion[...]
di ringraziarla, come [...]
le Matrici dei caratte[...]
quanto si vede. Le [...]
se ne potrà ricever per il [...]
ne vorrà, mi ri[...]
[...] quando questa [...]
piacesse di [...]

Di Lei Ill.mo Sig.r [...]

è quantità reale, conserverà una tal qualità anche quando $z = 0$: ma in detto caso si agguaglia ad $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, e per la citata lettera $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = 1$;

dunque $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l1$ è anch'essa grandezza reale.

[...]lla dimanda la ragione per cui il Sig.r Ab. Bassuti si forma nella espressione $\frac{2a}{\sqrt{-1}}\, l{-1}$. Eccola. Essendo il semiquadrante $\frac{p}{4} = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$, avremo $p = \frac{a \cdot 2l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$: ma $2l\sqrt{-1} = l{-1}$; dunque $p = \frac{a}{\sqrt{-1}}\, l{-1}$, e quindi $a : p$, ossia $2a : 2p :: \sqrt{-1} : l{-1}$. La quantità $\frac{2a\, l{-1}}{\sqrt{-1}}$ [...]

$\frac{a\sqrt{-1}}{a\sqrt{-1}} = -1$
$= 1$, se
meglio:
[...]
[...]
elli

6

Al Nobil Homo

Il Sig.r Cosmo Giordano Ojc

Venegia

Treu

Illmo Sig.r Sig.r Pron Colmo

Illmo Sig. Sig. Prone Colmo 143

Treviso 23. Maggio 1776.

...vrà Ella letto nella mia Dissez. corrente la Dimostrazione, che $o\sqrt{-1}$ aggiunto ad una quantità reale non la cangia in immaginaria, e che $a \pm o\sqrt{-1} = a$. Ciò premesso, esaminiamo la formola dell' Ab. Vincenzo $\frac{\sqrt{-1}}{2} l.a.\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{2} l.-a$, in cui da Lei si afferma che il primo termine è reale, ed il secondo immaginario. Se il primo termine è generalmente reale, sarà anche tale, quando $z = 0$: ma in tal caso esso termine si agguaglia a $\frac{\sqrt{-1}}{2} l.-a$; dunque questa grandezza è reale, e non immaginaria, come Ella pensava.

...ngo alla formola del Sig.r Ab. Cossali, la qual è veramente $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$, e non $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} + \frac{a}{2\sqrt{-1}} l.$

Torno a ripetere il premesso discorso. Se $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ è quantità reale, conserverà una tal qualità anche quando $z = 0$: ma in detto caso si agguaglia ad $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l\frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}}$, e per la citata lettera $\frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}} = 1$; dunque $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l1$ è anch'essa grandezza reale.

...lla dimanda la ragione, per cui il Sig.r Ab. Cossali si forma nell'espressione $\frac{aa}{\sqrt{-1}} l-1$. Eccola. Essendo il semiquadrante $\frac{p}{4} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, avremo $p = \frac{a.2l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$: ma $2l\sqrt{-1} = l-1$; dunque $p = \frac{a}{\sqrt{-1}} l-1$, e quindi $a : p$, ossia $2a : 2p :: \sqrt{-1} : l-1$. La quantità $\frac{2a\, l-1}{\sqrt{-1}}$

10.

144

$\frac{2a}{\sqrt{-1}}\,l{-1}$ si agguaglia alla circonferenza circolare, e ed essa mi suggerisce a prima vista stare il diametro alla circonferenza $2p$ come $\sqrt{-1} : l{-1}$, siccome ha determinato il Sig. Giovanni Bernoulli. Se proseguendo avesse notato essere $2p = \frac{2a}{\sqrt{-1}}\,l{-1} = \frac{a}{\sqrt{-1}}\,l1$, ne risulterebbe $2a : 2p :: 2 : \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l1 :: \sqrt{-1} : \frac{1}{2}\,l1$, proporzione che coincide con quella del Bernoulli, essendo $\frac{1}{2}\,l1 = l{-1}$, e perciò $l1 = a$

Quando l'Ab. Lassuti afferma $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\sqrt{-1} = 45^{\circ} + mp$ altro non intende se non che alla detta quantità $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\sqrt{-1}$ possono competere infiniti valori, secondo che si fa $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ &c. Da ciò non si inferisce l'eguaglianza dei predetti valori.

La formola $\int \frac{a^2dz}{a^2+z^2}$ = Arco Rag. a Tang. $z$, assegnata a $z$ una data grandezza, può accettare infiniti valori. Se sia $z = a$, avremo Arco Rag. a Tang. $a = 45^{\circ} + mp$, ma non per questo possiamo dire che tali infinite radici siano fra loro eguali

L'equazione del terzo grado $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ ha tre radici $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, le quali certamente sono ineguali.

Mi continui l'onore della sua grazia, e della corrispondenza, mentre mi dichiaro

Di V.S. Ill.ma

Divot. Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Lorenzo M.a Castani. Roma

Illmo Sigr Sigr Pron Colmo

ma
quelle
la vesso
rignere
palissimi
rime,
cià a novesi,
o di fare
uti di
fentemente
riflettere
estario
$\frac{a v - 1}{a v - 1} = -1$
$= 1$, se
che gli:

no della V.S.
o Colmo

egelli

10

0. 140 [illegible]

Illmo Sig. Sig. Pron. Colmo

Mentre sto in aspettazione, che V.S. Illma si degni di onorarmi di qualche risposta sopra quanto le ho scritto intorno alla nota controversia del Sig. Abb.e Pessuti; le trasmetto queste osservazioni prolissime, che penserei di pubblicare a lei indirizzandole, quando ella giudichi che non siano infette d'errore. Ma poi ella con altra lettera, se le aggrada aggiugnerà quello di più che vorrà, che si stamperà: Dico, che le osservazioni da me fatte sono prolissime, e pure mi sono contentato di attaccare il massiccio, e quanto mi sembra della quistione, lasciando moltissimi capi del libro del Sig. Pessuti senza risposta, e perchè troppo facili a trovarsi, e perchè si tratta di cose, che non la meritano, e perchè ancora sarebbe stato duopo di fare un libro per rispondere minutamente a tutto. Abbia V.S. Illma adunque la bontà di favorirmi del suo giudizio sopra le compiegate osservazioni, che ne la prego instantemente. A conferma di quanto le scrissi della formola del Sig. Co: Vincenzo si compiaccia di riflettere il caso, in cui può avvenire, che la formola $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=-1$, e troverà esser necessario come dall'equazione si deduce, che sia $2z=0\sqrt{-1}$, e però non poter mai essere $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}=-1$ posta $z=0$. Così accade a quella del Sig. Pessuti non potendo mai essere $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}=1$, se non sia $2z\sqrt{-1}=0$. La supplico di perdonarmi gl'incomodi, che gli ho recati, e che gli reco; e con tutto l'ossequio mi protesto

Di V.S. Illma

Roma 27 Maggio 1778

Umo, ed Obbmo Servo
Pronmo [illegible] Calandrini

Devmo Obligmo Servitore vero
G. Franco de Malfatti

Giacº [illegible] Brigelli

10. 1467

Dev.mo Oblig.mo Servitore vero
G. Franc.o de Malfatti

Giac.o Rinigeosir Bagelli

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pne Col.mo

Il Sig.r U. Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso.

Osservazioni sopra la dimostrazione addotta dal S.r [illegible] Pessuti, che la circonferenza del circolo stia al diametro come $L-1 : \sqrt{-1}$

Il S.r Gioacchino per dimostrare senza paralogismo tra la circonferenza del circolo, ed il diametro la proporzione avvertita da Gio: Bernoulli di $L-1 : \sqrt{-1}$ prende a integrare la formula $\frac{a^2dz}{a^2+z^2}$, che esprime l'elemento d'un arco di circolo del raggio $= a$, e della tangente $= z$. Separa pertanto la riccennata frazione in due, talchè $\frac{a^2dz}{a^2+z^2} = \frac{\frac{1}{2}adz}{a+z\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}\frac{adz}{a-z\sqrt{-1}}$, e prendendo la sottangente $=1$ ci stabilisce per integrali la $[illegible] = \frac{a}{2\sqrt{-1}} L\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$. Giunto a questo segno, e posta $z=a$, trova [illegible] $\frac{a}{2\sqrt{-1}} L\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} L\sqrt{-1}$, che esprime il semiquadrante, e [illegible] la circonferenza $= \frac{4a}{\sqrt{-1}} L\sqrt{-1} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} L-1$, quantità che sta al diametro $2a :: L-1 : \sqrt{-1}$. Questa è la dimostrazione, ch'egli dà da lui trovata fin nell'età di 15, o 16 anni, allorchè dal P. Gregorio Fontana ora Professore delle matematiche sublimi in Pavia gli fu proposto di ricercarne una.

Io credo, che questa dimostrazione sia quella, che il S.r Gioacchino [illegible], ma non so indurmi a credere, che il P. Gregorio Fontana ne restasse contento, perchè la integrazione non è compita, [illegible] fatto, come determina egli la costante da aggiungersi [illegible]

Devot.mo Obblig.mo Servitore Vero
G. Franc.o de Malfatti

Giac.o [illegible]

~~[illegible]~~ fa neppure una parola? M

di ~~[illegible]~~ di costante, dirà egli, perché

Siete ~~[illegible]~~ veder subito, ch'essa è =0

Nella formola generale integrata fatta z=0,

troverebbe ch'essa si cangia così $\frac{a}{n+1} \frac{la}{la}$ : ma $\frac{a}{a}$

$L1=0$; dunque la costante =0. Che così ragi

il Sr. Gioacchino Pessuti si raccoglie dalla pag

24 del suo libro pubblicato in Livorno col ti

= Riflessioni analitiche dell'Ab. Gioacchino

= già Professore di Matematiche nel Corpo di

~~[illegible]~~ Nobili di Pietroburgo sopra una lettera su

= del Sr. Ab. Co: Vincenzo Riccati, ed inserita nel

= nella nuova raccolta di opuscoli scientifici,

= filologici stampata in Venezia nell'anno

Q è in cotesto libro appunto, ove si propone

Dimostrazione da lui trovata. Ma mi perdo

~~[illegible]~~, come seguendo l'indicata tracci

riesca la costante =0 è vero, che sono poco

nel calcolo, e massimamente nell'integrale

tralasciato l'esercizio quasi affatto per più

ma parmi di avere una qualche ragione da

che mi tratterrà dal seguire il suo parere.

Abbiate di grazia, e mi conceda pure, ove

uno sbaglio, che volentieri accetterò. La sua

essendo ~~[illegible]~~, che amo d'imparare, né

~~[illegible]~~ di confessare per mezzo delle altrui corre

questi errori, ne' quali fossi caduto. Nemmeno

posso astener lontano dall'opporre le autorità, che

queste materie non mi convincono.

Crede dunque il P.re Gioacchino, che nella formola $\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ fatta $z=0$, essa diventi $=1$. Vediamo come ciò possa verificarsi. Pongasi la data frazione $=1$, avremo $a+z\sqrt{-1}=a-z\sqrt{-1}$, e però $2z\sqrt{-1}=0$, cioè $z$ immaginaria; dunque sostituendo per $z$ un valore qualunque reale è impossibile, che la formola divenga $=1$, e però qualunque valor reale, che per $z$ si sostituisca sarà immaginario il valor della formola; ma il P.re Gioacchino mettendo $z=0$ dà un valor reale alla $z$, dunque il valor della formola dee essere immaginario, e non reale, come egli pretende, dunque la sua dimostrazione è paralogistica. Moltiplicando poi egli per 8 la formola, che ha integrata, e fatta $z=a$ trova la circonferenza del circolo $=\frac{4a}{\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}=\frac{2a}{\sqrt{-1}}\cdot 2l\sqrt{-1}=\frac{2a}{\sqrt{-1}}\, l-1$: quantità che sta al diametro $2a :: l-1 : \sqrt{-1}$. Così compie la dimostrazione, che egli si era prefisso; dimostrazione assai facile, come egli dice, e come è vero trovandola in tal maniera, onde gli sembra strano, che l'abb.te Riccati non abbia saputo indovinare questo semplicissimo giro di calcolo, il quale gli avrebbe risparmiata la vergogna di accusare a torto il gran Bernoulli di paralogismo.

L'espressioni del P.re Gioacchino potevano essere più moderate riguardo all'abb.te Riccati, e dal vedere che un sì grand'Uomo non ha saputo indovinare

Dev.mo Obblig.mo Servitore Vero
G. Franc.o de Malfatti

Giac.o [illegible]

questo semplicissimo giro di calcolo, doveva il
Giovachino prender giustissimo timore, che un tr
soverchio coraggio a mettere in trionfo la sua
dimostrazione, e a ~~rimproverare~~ l'Ab.^te^ Co: Ric
di non aver saputo trovarla. Ma giacchè ei s
d'indovinare voglio io provarmi a indovinare le
che hanno forse trattenuto l'Ab.^te^ Riccati dal
correre nella dimostraz.^ne^ del P. Ab.^te^ Giovach.^o^ S
Integro pertanto la formola coll'aggiunta della c
e trovo $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} - \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}} =$
$= \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} \cdot \frac{a+o\sqrt{-1}}{a-o\sqrt{-1}}$, e fatta $z=a$, e molti
plicata per 4 si avrà $\frac{4a}{\sqrt{-1}} l \frac{a\sqrt{-1}+o}{a+o\sqrt{-1}} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} l \frac{a\sqrt{-1}}{a+}$
$= \frac{2a}{\sqrt{-1}} l \frac{-aa+2a \cdot o\sqrt{-1}}{aa+2a \cdot o\sqrt{-1}}$, dov'è evidente, che non
essere $\frac{-aa+2a \cdot o\sqrt{-1}}{aa+2a \cdot o\sqrt{-1}} = -1$, come deduce il P. Giov
se non sia $2a \cdot o\sqrt{-1} = 0$: ma questo è impossibil
dunque è impossibile, che la formola passa
nell'espressione da lui preteso cioè $\frac{2a}{\sqrt{-1}} l -1$.
ha ragione l'Ab.^te^ Riccati di domandar con
giro di calcolo il P. Bernoulli ritrova esser
la circonferenza al diametro, come $l -1 : \sqrt{-1}$
Tanto più poi ha ragione perchè $l -1$ è quantità
e non immaginaria, come crede il P. Giovachino,
serve a sostenere la sua opinione, ch'egli ricorr
all'equazione della Logistica $e^y = x$, ch'io gli d
non esser la vera, ma sì bene l'altra $e^y = \pm$
Il P. Ab.^te^ Co.^te^ Vincenzo Riccati ha dimostrato nelle
sue istituzioni, nè il P. Giovachino, che ne ha fa
l'estratto, gli ha contradetto, che la Logistica h

Due rami, e che però a ciascun logaritmo corris=pondono due numeri uno positivo, l'altro negativo, lo che viene confermato dal calcolo, giacchè il differenziale di $lx$ trovasi uguale al diff.le di $l-x$, e però $l\frac{x}{-x} = lx - l-x = lx - lx = 0 = l-1$. Riteniamo un'istante l'equazione $e^y = x$: suppongasi $x = \frac{z+1}{z-1}$, sarà $e^y = \frac{z+1}{z-1}$ dunque $e^{l\frac{z+1}{z-1}} = \frac{z+1}{z-1}$: facciasi $z=0$, sarà $e^{l-1} = -1$: ma $-1$ è quantità reale; dunque reale dovrà pure essere $e^{l-1}$; ma questa non può esser reale, se tale non sia $l-1$; dunque $l-1$ è quantità reale, e non immaginaria.

Quindi vede il S.r Gioachino la sorte di questi infiniti logaritmi, ch'egli ricava a forza di supporre $l\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = l1$: logaritmi, i quali non possono sussistere, perchè ricavati da una formola, che m'inganno non regge, e perchè conducono ad assurdi. Facendo egli $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} = u$, e posta $z=0$, $a=1$, ricava $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1 = u$. Da che deduce, che siccome la tangente $z=0$ corrispondono gli archi $0 \pm p \pm 2p \pm 3p$, ed in genere ad arco $mp$, intendendo per la semplice $p$ la mezza circonferenza, e per $m$ un numero qualunque intero positivo, o negativo, esso sarà $mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$, onde essendo $l1 = 2mp\sqrt{-1}$ tanti valori si ricaveranno di $l1$, quanti possono essere i valori di $m$. Ma spero il S.r Gioachino tra l'altre cose, che $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$ è quantità immaginaria, e però necessariamente immaginario

Obbl.mo Oblig.mo Servitore Vero
G. Franco de Malfatti

Giac.o [illegible] Bagelli

[illegible] l'arco = u da d.° q.ta rappresentato, e [illegible] [illegible] d'arco immaginario corrispondere mai [illegible] una tangente reale, ne potrà d.° arco appartenere alla tangente reale $z=0$.

Con un simile raziocinio passo a trovare infiniti logaritmi di un numero negativo, e a rauglier[e] ch'essi sono immaginarj. Nella formola generale $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\,l\,\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ facciasi come fa egli $a=1=z$, [illegible] $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\sqrt{-1}$, che esprimerà secondo lui il semiquadrante [illegible] cioè l'arco di $45^{\circ}$; ma alla tangente $z=1$ [illegible] corrispondono infiniti archi della forma $mp+45^{\circ}$ [illegible] Dunque avremo, dice egli, $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,l\,\sqrt{-1}=mp+45^{\circ}$ [illegible] secondo il P.r Gioacchino $p=180^{\circ}$; dunque, dico io, fatta $m=1$, sarà $45^{\circ}=180^{\circ}+45^{\circ}$. Bas[ta] così.

[illegible] come dice il P.r Gioacchino, che ad un num[ero] [illegible] qualunque corrispondono infiniti logaritmi, fatta [illegible] dal P.r Eulero da quell'uomo celebre degno della più grande ammirazione, mi giunge affatto nuov[a] né voglio maravigliarmi, perché come ho avut[o] da principio [illegible] parecchi anni, che a qu[esti] studj con infinito mio rincrescimento non po[sso] attendere, né per conseguenza vo in traccia di quello, che si va producendo di nuovo appartenente ad essi. La scoperta corrisponderà alla sottigliezza ed acutezza d'ingegno di quell'uomo sommo, m[a] non posso non dubitare, che il P.r Gioacchino pr[enda] qualche sbaglio. Venendo egli ad esporla [illegible]

a conseguenze, le quali bisogna, ch'egli stesso confessi essere assurde, ed affatto contrarie a quelle, che si avrebbe dovuto dedurre. Io pertanto col mio padrone crederò di far meglio del Sig.r Gioachino, che dopo le conseguenze assurde da lui medesimo ricavate, asserisce, che la scoperta è una delle più belle, ed importanti. Tale sarà, ma non è qual'egli l'ha esposta e lo sarà per tutt'altro, che per quello, che il Sig.r Gioachino ha detto, per cui mi protesto pieno di stima, e di rispetto.

Dev.mo Oblig.mo Servitore Vero
G. Franco de Malfatti

Giac. Scuriscavi Bagelli

Ill. Conte Sig. e Prone Stimo 153

Illmo Sig. Conte Sig. Sig. Prone Colmo 155

Ieri mi è stata consegnata la dissertazione di V. S. Illma, che risponde ai poco rispettosi attacchi dell'Ab. Pessuti fatti alle Instituzioni analitiche dell'immortale di Lei Fratello. Io l'ho scorsa rapidamente, ma con un po' più d'agio la studierò, siccome conviene, e quindi la manderò all'Ab. Troili di Modena, siccome Ella mi ha comandato. Io resto meravigliato, come quel Toscano, il quale debb'esser pure un uomo di qualche merito, abbia dimenticato a Pietroburgo le creanze, e il rispetto, che è dovuto ai grand'uomini, se pur egli colà gli ha portati. Ella gli risponde con una modestia, che non merita, e che io avrei durato pena a sostenere. Piaccia al Cielo, che gli serva di lezione per altre volte, ma io dubito che non si lavi la barba all'asino, e che costui ~~ma~~ sia già nel vizio invecchiato. Intanto Ella ha fatto benissimo a difendere il Fratello dalle accuse di questo ardito, il quale dopo che avrà letto la dottissima dissertazione di V. S. Illma, s'accorgerà, che dei chiarissimi Riccati si dee parlare con più riguardo di quel che egli ha fatto. Io la prego di conservarmi la cortese sua grazia, e di credermi quale immutabilmente, e con pieno ossequio mi protesto

Di V. S. Illma

Ferrara li 2 Giugno 1778

Devmo Obligmo Servitore Vero
G. Franco de Malfatti

10. 154

156

Ill.mo Sig.r e Prone Stimo

5

...dell'esame di ciò...

del
ua
o 'oleni
u- ta La
uto di
ue per
unto di
ed $a\sqrt{-1}=$
thio, che
nne
vai a mio
ra.
egime del
e immagi=
: Vinc.
chi l'ha
ue
immensi;
$z=\infty$,
'stitui=
quando
e tali
com=
ive per

Giac. Mis... Bezzelli

...questo, e nell'altro ordinario ebbi l'onore di ricevere sue lettere, ma nè in questo nè nell'altro ho avuta lettera del S.r Locatelli. Son stato però avvisato da alcun di questi ministri di Dogana dell'arrivo della Balla, e ho dato li ordini perche sia trasportata alla Casa del Cavaliere, che me ne diede la commissione. Non dubito non siano, e le pelli, e il corame per riuscire di tutta la soddisfazione del Cavaliere, e da lui med.mo l'intenderò quanto prima. Subito che mi verrà la notizia del costo, non sarà ritardato un momento il debito pagamento. Intanto mi trovo sempre con nuove obblighi per nuovi favori, che sempre da Lei ricevo, ed io nell'avere la maggiore riconoscenza la ringrazio infinitamente.

Ho sentito d'intelligenza, che il S.r Remondini potrà avere l'incarico di quelle due stampe quanti ne vorrà. Se io potrò da Lei, o da lui qualche comando sarò sempre

Dispiacere che ho provato nell'aver sentito che sia stata attaccata da una risipola con febbre ho avuto la consolazione di sentire contemporaneamente, che ora Lei trovi l...ta, che Dio la preservi lungamente. Non ho altro da soggiungere se non di darle parte della continuazione della sua grazia, e rivedermi che sono sempre più con maggior Obblig.o e riconoscenza

di Lei Devoto S.r Conte

Divotiss.o ed obblig.mo Servitore
Giac.o Maria Conte Bregelli

e prestarmi alla sua Ubbidienza; sebbene quanto al
Quarondini, non avrà egli bisogno dell'opera mia, che
sarà in corrispondenza con esso questo dalla Volpe, ed in
conseguenza fra loro potranno negoziare. Frattanto
resto co' sensi sinceri della mia più distinta
ed ingenua riconoscenza, e mi protesto d'essere Sempre
Di Lei Sig.r Cariss.mo

Bologna 2 Giugno 1778

Divotiss.o Obbl.mo Serv.e
Giac. Majocchi Bugelli

Il dispiacere che ho provato nell'aver sentito che siate stata travagliata da una risipola con febbre ho avuto la consolazione di sentire contemporaneamente che ora sia ristabilita, che Dio la preservi lungamente. Non ho altro da soggiungere se non di pregarla della continuazione della sua grazia e credermi che sono sempre più con maggior rispetto e riconoscenza

di Lei Torino S. Carlo

Div.mo ed Obb.mo Servo
Giac. Menicozzi Brigelli

5 8

Al nobil uomo
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia Treviso

c 1778

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Col.mo 161 71

69

165

La compitissima sua dei 22 Maggio mi è pervenuta mentre era incomodato da una risipola nella gamba destra simile a quella dell'anno passato, ma notabilmente più mite. Ora che sono presso che interamente

159

Ill.mo Sig.r Conte Sig.r e Prone Col.mo

Bologna 9 Giugno 1778

I contanti, e ricevute vennero l'ordinario passato, come le scrissi, e in questo posso dirle che sono stati di piena soddisfazione secondo il solito. Ma da quel S.r Zocarelli di Reggio non ho avuto mai, nè in questo ordinario alcuna lettera, che ora soltanto più non serve, giacchè Ella mi favorisce di mandarmi la lista di cotesto S.r Zo[illegible] e l'importo de' sudd.i In seguito di che ri[illegible] qui compiegata la debita cambiale pagabile al S.r [illegible] della somma indicata delle ₤ 196:11 [illegible], che farà il piacere di farla ricevere, e ri[illegible] a questo n'ho altro, che da replicarle i miei sen[illegible] più vivi e sinceri ringraziamenti.
Il dispiacere che ho provato nell'aver sentito che [illegible] stata [illegible] da una risipola con febbre ho avuto la consolazione di sentire contemporaneamente, che ora se n'è trovata [illegible], che Dio la preservi lungamente. Non ho altro da soggiungerle se non che la prego della continuazione della sua grazia, e credermi che sono sempre più con maggior ossequio e riconoscenza

Di Lei Ill.mo S.r Conte

Div.mo ed Obblig.mo Serv.e
Giac.o [illegible] Bezzelli

160

Ill:mo Sig:ra Sig:ra Diana Cotma 161 71

169

165

compitissima sua dei 22 Maggio mi è pervenuta
mentre era incomodato da una risipola nella gamba
destra simile a quella dell' anno passato, ma notabil=
mente più mite. Ora che sono pressochè interamente

che 11
ed anc
ra

ne
Poleni
ra lo
into di
ne per
aproto di
Ed a√-1 =
bio, chi
pone
trèi a mio
elas.
si
assi
ioffragine del
a
; ma immagi=
il
Co: Vinc?
chi l'ha
che
ni'immagi
1z = ∞,
i sostitu=
quando
; e tale
com=
ire' per

138

6

Al Nobil Uomo
Il Sig. Conte Giordano Riccati
Venezia
Treviso

Ill.mo Sig.ra Sig.ra Drona Colmo

La compitissima sua dei 22 Maggio mi è pervenuta mentre era incomodato da una risipola nella gamba destra simile a quella dell' anno passato, ma notabilmente più mite. Ora che sono pressochè interamente guarito, posso fare qualche riflessione sulla sua dott.ma Scrittura.

Dalla mia precedente lettera dei 9 … e dei 23 Maggio ella averà compreso essere $0\sqrt{-1} = 0$. La quantità $a+b\sqrt{-1}$ è immaginaria. Per ridurla reale, fa di uopo levare il termine immaginario $b\sqrt{-1}$, onde resti la quantità reale $= a$. Ora ciò analiticamente si ottiene sottraendo da $a+b\sqrt{-1}$ la quantità $b\sqrt{-1}$, e scrivendo così $a+b\sqrt{-1}-b\sqrt{-1} = a$. Conseguentemente $b\sqrt{-1}-b\sqrt{-1} = 0$. La prima parte di questa equazione può ricavare una doppia ~~una doppia~~ espressione, cioè $b-b.\sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}-\sqrt{-1}.b = 0.b$. Il perchè avremo $0\sqrt{-1} = 0.b = 0$, e ne inferiremo che il nulla moltiplicato nelle grandezze ineguali; ed anche di genere diverso $\sqrt{-1}$, $b$, &c. mi dà sempre il prodotto $= 0$. Tutto quello che può notarsi si è, che $0\sqrt{-1}$ è un nulla di quantità immaginaria, e $0.b$ un nulla di quantità reale, posto che sia tale il valore di $b$.

Vendo per mano la formola del Sig. Ab. Lessuti, quando $z=0$, ch'è la seguente $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l1 = u = mp$, e ne deduco $l1 = \frac{2mp\sqrt{-1}}{a}$. I logaritmi adunque della unità saranno

zioni la natura della formola, che sè stessa è immaginaria. Anzi s'è immaginaria, quando $z=\infty$, molto più (per diversi) tale dovrà essere, quando dall'infinito passeremo al finito, e tale si conserverà fino all'ultimo termine, cioè, quando $z=0$. Ogni quantità variabile ~~…~~ compresa fra i due limiti $\pm\infty$, $\pm 0$, se in uno di dd. limiti riesce possibile, o impossibile col sostituire per

dì, che
te. Soleni
sente la
solenità di
adduce per
cui posto di
$-1$, ed $a\sqrt{-1} = \frac{?}{2}$
o dubbio, che
suppone
. Direi a mio
lusso.
ispezione del
i, ma immagi-
co Co: Vinc.o
ne' a chi l'ho
senhe
ebità immagin.
fin;
ndo $z=\infty$,
essi sostitu=

sarannо tutti immaginarj, eccettuato il caso di $m=0$,
nel quale abbiamo $l1 = 0\sqrt{-1} = 0$ per la cosa detta
di sopra. Generalmente essendo $u = \frac{a}{n\sqrt{1}} l1$, e $l1$
$= \frac{nmp\sqrt{-1}}{a}$, avremo $u = mp$ quantità reale.

La difficoltà, che Ella fa sulla formola $\frac{1}{n\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, l'ho sci
nella lettera dei 23. Maggio.

Passo dunque alla formola $a^y = x$, la quale è troppo
stretta, perchè non mi dà nella logistica salvochè il
mo dei numeri positivi. La formola, che mi som
ministra amendue i rami, si è la seguente $f(\frac{g}{f})^{\frac{y}{h}}$
nella quale $f$ esprime il primo numero, $g$ un numer
ed $h$ il corrispondente logaritmo infinitiformi, e
capaci di infiniti valori relativi, ed $x$, $y$ il numer
ed il logaritmo corrispondenti. Si cerchi il numer
$x$ relativo al logaritmo $y$. Io posso sempre scegl
un logaritmo $h$, che si riferisca ad $y$ come il nu
mero pari $n$ alli impari $m$, onde si abbia $\frac{y}{h} = \frac{m}{n}$
e quindi $f(\frac{g}{f})^{\frac{m}{n}} = f \cdot \pm \sqrt[n]{(\frac{g}{f})^m} = x$. Per la qual us
scelta le opportune grandezze delle coordinate in
nitiformi $h$, $g$, io otterrò sempre che sia
$f \cdot \pm (\frac{g}{f})^{\frac{y}{h}} = x$. Pongasi $f=1$, ed $y=0$, e trov
veremo $\pm(g)^0 = x$: ma $\pm(g)^0 = \pm 1$; dunque $x=$
e perciò $0 = l\pm1$. Questo è l'unico logaritmo
reale che compete ai numeri $\pm 1$, i quali se ne
appropriano infiniti di immaginarj espressi dalla
formola $nmp\sqrt{-1}$.

terminata la Risposta alle Riflessioni Analitiche, del Sig.r Ab. Rassuti, che fingo distesa da un Discepolo di mio Fratello, perchè non voglio esporre il mio nome alle maniere poco obbliganti del Sig. Ab., e che penso di pubblicare nel Giornale di Modena.

La ringrazio infinitamente del zelo che nutre per la memoria dell'Ab. Vincenzo, ed esibendomi a suoi preziosi comandi, con pieno rispetto mi sottoscrivo

Di V.S. Ill.ma

Treviso 16. Giugno 1776

Ill.mo Sig.r Padrone M.a
Caldani. Roma.

Divot.mo Obbl.mo Serv.r V.o
Giordano Riccati

zioni la natura della formola, che di se stessa è immaginaria. Anzi s'è immaginaria, quando $z=\infty$, molto più (per diversi) tale dovrà essere, quando dall'infinito passeremo al finito, e tale rimarrà fino all'ultimo termine, cioè, quando $z=0$. Ogni quantità variabile compresa fra i due limiti $\pm\infty, \pm 0$, se in uno di dd. limiti riesce possibile, o impossibile col sostituire per

Ill.mo Sig.re Sig.re Pad.ron Col.mo

Ill.mo Sig.re Sig.re Pad.ron Col.mo

Due pregiat.mi fogli ho ricevuti di V.S. Ill.ma, uno il dì primo corr.te, il secondo il giorno 2 d.o, che ambidue riguardano quanto le ho accennato intorno all'integrale delle note due formole. Io le ne rendo infinite grazie, e mi dispiace di averla annojata colle mie dicerie, e di non aver avuta la sorte di esser con lei di un medesimo sentimento. Ma giacchè ella ha avuta fin qui tanta bontà di soffrirmi, soffra ancora queste poche righe, nelle quali terrò conto delle ragioni, ch'ella adduce per non approvare quello, ch'io penso, e de' fondamenti, su quali ho appoggiato il giudizio, che porto di d. due formole. Nella prima sua ella vuole $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=-1$ posta $z=0$, perchè $\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}=-1$, ed $a\sqrt{-1}=0+a\sqrt{-1}$, e però $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}=-1$. Io non ho avuto, e non ho dubbio, che $\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}=-1$, ma ho dubbio, che per questo possa prendersi $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}=\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}$, e il dire, che $a\sqrt{-1}=0+a\sqrt{-1}$ parmi un supporre quello, ch'è in questione, e che appunto abbisogna di una incontrastabile dimostrazione. Potrei a mio favore addurre una ragione, ch'è di V.S. Ill.ma med.ma, e ch'ella mi oppone, e ch'è vera. Eccola. Egli è infallibile, che $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ è generalmente immaginaria, di che abbiamo una dimostrazione dal suo logaritmo, dunque sarà tale ancora, quando $z=0$, dunque $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}$ non sarà reale, ma immaginaria, dunque non potrà essere $=\frac{a\sqrt{-1}}{-a\sqrt{-1}}$. Questo è lo scoglio, dove dubito, che sia incorso il S.r Co: Vinc.o non quello di non aver saputo, che $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$. È questa una taccia la quale fa più disonore a chi l'ha data, che a chi l'ha ricevuta. Egli pensa, che fatta $z=\infty$, la formola non diventi $=1$, perchè veramente $a\sqrt{-1}$ per quanto sia piccola rispetto alla $z$, non può trascurarsi, e rende la quantità immaginaria; ma poi fatta $z=0$ prende per reale la q.tà, che risulta: ma s'è immaginaria, quando $z=\infty$, lo dee essere necessariamente quando anche $z=0$, giacchè non si muta per nessuna di queste sostituzioni la natura della formola, che per se stessa è immaginaria. Anzi s'è immaginaria, quando $z=\infty$, molto più /per dir così/ tale dovrà essere, quando dall'infinito passeremo al finito, e tale si conserverà fino all'ultimo termine, cioè, quando $z=0$. Ogni quantità variabile ~~[illegible]~~ compresa fra i due limiti $\pm\infty, \pm 0$, se in uno di d.d. limiti riesce possibile, o impossibile col sostituire per

essa quantità reale, tale sarà ancora per tutti i gradi di mezzo fino all'altro limite inclusivamente
Così $y=x$ sarà sempre reale, $y=x\sqrt{-1}$ sarà sempre immaginaria. Il P. Pessuti si crede, che il
Sig. Co: Vincenzo si fermi a dimostrare immaginaria la formola $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ posta $z=\infty$, ma si
crede a torto. Lasciando però da parte le accennate ragioni, le quali benchè vere possono in
piuttosto sottigliezze non opportune, dico, che non potersi dimostrare $a\sqrt{-1}=0+a\sqrt{-1}$, perchè
sarebbe $0=0\sqrt{-1}$ equazione impossibile. Non può dubitarsi, che $0:0\sqrt{-1}::a:a\sqrt{-1}$; ma
può esser mai $a=a\sqrt{-1}$, dunque non può esser mai $0=0\sqrt{-1}$, e però questa resta un'equaz
impossibile. Così mi pare, che resta dimostrato esser impossibile di diventar la formola $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$
$=-1$ posta $z=0$; non potendosi trascurare il zero nell'espressione $\frac{0+a\sqrt{-1}}{0-a\sqrt{-1}}$. Non altrimenti
dissi dell'altro caso, in cui si mette $z=\infty$, d'onde nasce $\frac{\infty+a\sqrt{-1}}{\infty-a\sqrt{-1}}$, dalla quale ricaverebbesi
$a\sqrt{-1}=\infty-\infty$; ma $\infty-\infty$ è reale, dunque un reale si uguaglierebbe ad un immaginario
questa è la ragione, per cui il Sig. Co: Vincenzo, e con lui altri grandi uomini hanno pensato, che
non sia $\infty+a\sqrt{-1}$ quantità reale. E in fatti per trascurare una quantità in paragone di un
è necessario, che questa contenga quella infinite volte. Or chi dirà mai, che l'infinito re
contenga infinite volte una q.tà immaginaria? Ella per provare, che posta $z=\infty$ riesca
valor reale della formola sostituisce $z=\frac{a^2}{0}$, e trova $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, che ella crede $=1$, perchè
invece di scrivere $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$ dice di poter scrivere $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}}$. Ma, domando perdono, queste formole
q.tà tra loro differentissime, e non veggo, che sia in mia libertà di mutare il segno a qualunq
siasi termine di una formola. Sarà egli in mia libertà, se per un caso giugnessi alla equ
equazione $x=a$ di prender invece $x=-a$? Vegga di grazia, che prendendo $\frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}=\frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}}$
si viene a supporre $a-0\sqrt{-1}=a+0\sqrt{-1}$, e per conseguenza $0=0\sqrt{-1}$, che come si è dimostrato è
equazione impossibile. E qui mi cade di fare un'altra riflessione, la quale conferma la dim
accennata. Supponiamo di avere l'equazione di una curva, le cui ascisse $=x$, le ordinate $=$

e dando un valore alla x, figuriamoci, che nasca l'equaz.e $y = 0\sqrt{-1}$, come appunto succede nella curva dell'equaz.e $y = \frac{a-x}{a}\sqrt{xx-2aa}$, facendo $x = a$, dirò io, che la curva seghi l'asse ove $x = a$? No certamente, anzi ch'egli è impossibile, eppure dovrei dirlo, se, com'ella pensa, fosse $0\sqrt{-1} = 0$. Dunque non posso prendere indifferentem.e un valore per l'altro, ma dovrò attenermi a quello, e niente più, che le formole mi somministrano senza punto alterarle; perchè qualunque minima alterazione va a cangiarle del tutto, altrimenti quelle conseguenze, che ricaveremo non saranno di natura della formola, ma nostre, e meramente ideali.

Infatti dov'è mai, che la formola $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}$ dia di sua natura il valore $=1$ quando $z=\infty$, e dia il valore $=-1$ quando $z=0$? Facciasi $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=1$, e veggasi il valore, che dee darsi in tal caso alla z: noi avremo $z-z = 2a\sqrt{-1}$, cioè la z dee essere di tal grandezza, che $2a\sqrt{-1}$ possa trascurarsi, e diventar nulla, ma per ciò fare è necessario, che la z sia dello stesso genere, di cui è $2a\sqrt{-1}$, vale a dire immaginaria, dunque la z dee uguagliarsi ad un infinito immaginario e non reale, e così sostituendo un tal valore si ha appunto evidentemente la formola $=1$.

Facciasi ora $\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}=-1$ avremo $2z = \overline{a-a}.\sqrt{-1}$, cioè $2z = 0\sqrt{-1}$, e non $z=0$, e così sostituendo $z=0\sqrt{-1}$ diventa appunto evidentemente la formola $=-1$; dunque la natura delle formole ricusa i valori, che da noi di nostro arbitrio si attribuiscono all'incognita z per ricavarne, ch'esse si uguaglino alla p.te $=1$, ed alla p.te $=-1$.

L'altra ingegnosa dimostrazione, ch'ella dà dedotta dagli archi circolari quando $z=\infty$ suppone $\frac{\sqrt{-1}}{2}\, \ell\left(-a\cdot\frac{z+a\sqrt{-1}}{z-a\sqrt{-1}}\right)$ il vero integrale dell'arco circolare, che per me non sussiste attesochè la costante aggiuntavi non è quella, la quale io credo, che debba aggiugnersi.

Questi sono i fondamenti, su i quali ho esaminato la formola del P. Passuti, e pe' quali ho creduto di doverla chiamare paralogistica accennando, che il P. Co: Vincenzo aveva ragione di domandare con qual giro di calcolo si arrivava a dimostrare la circonferenza al diametro.

come $l-1 : \sqrt{-1}$ proposizione assolutamente assurda.

Vede ella quanto da tali fondamenti, che vi sia l'asserzione mia di essere la prima parte della formola del Sr. Co: Vincenzo già reale, e la seconda immaginaria, e ... pure per le stesse ragioni, che non sussiste la integrazione del P. Pesuti, il quale fa costante $= \frac{a}{2\sqrt{-1}} l1$, come chiaramente fa vedere di aver supposto alla pag: 24 del ... Libro.

Non posso esprimerle quanto mi dolga, che il sentimento di V. S. Illma, il quale io ... infinitamente, e venererò mai sempre, non sia uniforme al sentimento mio, ... in parte è lo stesso, che quello del Sr. Co: Vincenzo: ma se avrò errato non mi dispiacerà tanto per aver compagno nell'errore un sì grand'uomo.

Quanto ai logaritmi del P. Pesuti mi ricordo benissimo, che perchè ad un seno, ad un... corrispondono infiniti archi, non ne segue, che quegli archi siano tra loro eguali. ... parve a me, che così paresse al P. Pesuti dalla sua maniera di spiegarsi; ed avrò mal interpretate le sue parole. Non capisco però, come facendo egli $z=0$ nella sua formola e ricavando da tal supposizione l'arco $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1$, un tale arco, a cui corrisponde una t... reale $z=0$, possa essere immaginario, giacchè per le cose dette non può essere $l1=0=$... Inoltre egli pretende di dimostrare, che i logaritmi dei numeri negativi sono imm... quando dalle sue medesime formole si ricava il contrario. Egli per fare la sua dimostr... prende la formola $45^\circ + mp = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, e per lui $p = \frac{1}{\sqrt{-1}} l1$, $\frac{p}{4} = 45^\circ = \frac{1}{4\sqrt{-1}} l$... dunque posto $m=1$ sarà $\frac{p}{4} + p = \frac{p}{4}$; cioè $\frac{1}{4\sqrt{-1}} l-1 + \frac{1}{\sqrt{-1}} l-1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, ... $\frac{1}{4\sqrt{-1}} l-1 + \frac{1}{\sqrt{-1}} l-1 = \frac{1}{4\sqrt{-1}} l-1$, e moltiplicando per $\sqrt{-1}$, sarà $\frac{1}{4} l-1 + l-1 = \frac{1}{4} l-1$ cioè l... ovvero trasportando $l-1 = \frac{1}{4} l-1 - \frac{1}{4} l-1 = \frac{1}{4} l\frac{-1}{-1} = l1 = 0$, cioè il logaritmo del numero ... è lo stesso di quello del positivo. Ma non si avvede egli, che essendo sempre la specie p

. e qualunque altro arco $= A$ diviso per $\sqrt{-1}$, la formola $A + m p . \sqrt{-1}$ sarà sempre reale?

Restami da rispondere ad una difficoltà, che il S.r Passuti potrebbe farmi. Ella è questa.
Dovendosi secondo me aggiugnere all'integrale $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ la costante $-\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, posto $z=0$, l'integrale dee svanire; si avrebbe però $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} - \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} + \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a-0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}}$ $= \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a+0\sqrt{-1}} \cdot \frac{a-0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l 1$, ed ecco, che viene la formola del S.r Passuti, da che potrebbe egli ricavare di essere inutili le mie supposizioni, e di potersi prendere indifferentemente $0 = 0\sqrt{-1}$. Ma il S.r Passuti dovrà riflettere in questo caso, che non è $l 1 = 0$, ma $l 1 = 0\sqrt{-1}$, perciocchè $l \frac{a\pm 0\sqrt{-1}}{a\pm 0\sqrt{-1}} = l\, a\pm 0\sqrt{-1} - l\, a\pm 0\sqrt{-1}$ sta, che uguaglia un nulla immaginario, non un nulla reale, e così non m'è lecito di prendere $l 1 = 0$. In fatti sia $a^{m\sqrt{-1}} = b + x\sqrt{-1}$; dividendo per $a^{m\sqrt{-1}}$ da una parte, e per $b+x\sqrt{-1}$ dall'altra, avremo $a^{m\sqrt{-1} - m\sqrt{-1}} = \frac{b+x\sqrt{-1}}{b+x\sqrt{-1}}$, ed $m\sqrt{-1} - m\sqrt{-1} = l \frac{b+x\sqrt{-1}}{b+x\sqrt{-1}} = \text{no}$, cioè $0\sqrt{-1} = l\, b+x\sqrt{-1} - l\, b+x\sqrt{-1}$.

Ma è tempo, ch'io finisca di annojarla, e di abusarmi della sua pazienza. Peraltro non ostante che siasi dimostrato non poter prendersi $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, nè $a + 0\sqrt{-1} = a$ resterebbe tanta materia ancora da sviluppassi, che si farebbe un libro, e dopo altre sottilissime speculazioni che rimarrebbero, dovrebbe pure esaminarsi, se non ostante che all'integrale $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$ si aggiunga la costante $-\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+0\sqrt{-1}}{a-0\sqrt{-1}}$, questo integrale possa prendersi pel vero valore esprimente l'arco circolare. A dimostrare però, che il S.r Passuti non può giugnere alla proposizione Bernoulliana, basta di aver esaminato il punto della natura della d.a costante da aggiugnersi.

Ho ricevuto dal P. Nachi la copia del suo questo sulla forza viva, e le ne rendo infiniti ringraziamenti. Gli ho fatto chiedere se l'importo di Z 3:12 debbasi intendere di lire Veneziane o Romane, ma egli non lo sa; prego adunque di significarmelo, e soddisfare all'obbligo mio.

15 164

170

Mi continui l'onore della pregiatissima sua grazia, nella quale quanto so, e posso con tutto l'animo raccomandandomi mi protesto con distinta venerazione.

Di V.S. Ill.ma

Roma 17 Giugno 1778

Umo, ed Obbmo Ser

Petronio M.a Caldani

Illmo Sig.re Sig.re Prnd Colmo.

All'Illmo Sig.r Sig.r Sig.r Pron Colmo
Il N. U. Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso.

Illmo Sig.re Sig.re Pad.ne Colmo.

Oltre la lunga stucchevole diceria, che ultimamente ho trasmessa a V.S. Illma soffra di leggere ancora queste poche parole sopra un mio dubbio.

Il V.o Abb.e Sepulti giunto alla formola $\frac{4a}{\sqrt{-1}} L\sqrt{-1} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} \cdot 2L\sqrt{-1}$ deduce $\frac{2a}{\sqrt{-1}} \cdot 2L\sqrt{-1} = \frac{2a}{\sqrt{-1}} L-1$. Può egli dedurre legittimamente questa conseguenza? È certo, che $\frac{2a}{\sqrt{-1}} \cdot 2L\sqrt{-1}$ è qtà reale, laddove $\frac{2a}{\sqrt{-1}} L-1$ è per se qtà immaginaria. Inoltre considero l'equazione $a^4 = \overline{a\sqrt{-1}}^4$, la qual è vera, e però $La^4 = L\overline{a\sqrt{-1}}^4$ egualmente vera, ma non posso inferire $4La\sqrt{-1} = La^4$. Ciò posto resta chiaro adunque, che benchè sia vera l'equazione $L\overline{\sqrt{-1}}^2 = L-1$, non posso inferire $2L\sqrt{-1} = L-1$. La qtà $L-1$ è per se una quantità reale, come lo è $La^4$, ma parmi, che bisogni avvertire s'è derivata da quantità reali, o immaginarie per regolarsi nel prendere i logaritmi, giacchè due prodotti uguali possono provenire da moltiplicatori differentissimi. Potrebb'esser questa un altra maniera, s'io non m'inganno, di mettere al coperto il V.o Co: Vincenzo dalle pizzicanti censure del V.o Sepulti. Scusi di grazia tanti incomodi, che le reco, e con tutto l'ossequio mi protesto

Di V.S. Illma

Roma 10 Giugno 1778

Umo, ed Obbmo Serv.
Petronio Ma. Caldani

Opera del P. Odoardo Gherli Domenicano, che mi ha fatto formare una grandissima stima della profonda dottrina di questo dagnissimo Religioso. La supplico ad informarmi del prezzo dell'Opera stessa

16 15 172

Opera del P. Odoardo Gherli Domenicano, che mi ha fatto formare una plausissima stima della profonda dottrina di cotesto dignissimo Religioso. La supplico ad informarmi del prezzo dell'Opera stessa

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Pad.n Col.mo
Il N. U. Sig.r Co: Giordano Riccati

Treviso

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Col.mo

Ill:mo Sig:re Sig:re Prone Colmo 173

Averà V. S. Ill:ma ricevuto dal Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti la mia Risposta anonima alle Riflessioni Analitiche del Sig.r Ab. Pessuti. S. Ella la leggerà, la esaminerà, e mi comunicherà il riputatissimo suo parere, l'haverò per favor singolare.

Ho compiute altre due Lettere, nelle quali provo, che applicata la penna al punto medio di una corda, non può questa adattarsi alla curva isocrona bilanciata di un ventre solo; perchè nella prima vibrazione non ci impiegherebbe quel tempo, che esige la sua natura. Questa è la ragione, per cui col suono della corda totale sono sempre misti quelli delle sue parti aliquote. Si accomoda la corda alla curva composta di più semplici isocrone bilanciate, che più si avvicina alla primitiva figura, e per conformarsi alla quale la forza tendente la corda predetta esercita la minima azione.

Ho letto nei due ultimi Giornali l'estratto della bella Opera del P. Odoardo Gherli Domenicano, che mi ha fatto formare una pienissima stima della profonda dottrina di cotesto degnissimo Religioso. La supplico ad informarmi del prezzo dell'Opera stessa

stessa.

Il Sig.r Co. Girolamo Tenaroli s'era esibito di fare
pare in Brescia il terzo Tomo di Opuscoli dell'
Ab. Vincenzo mio Fratello; ma dopo principiat
l'edizione, lo Stampatore l'ha bravamente bu
lato. Mi scrisse poscia, che sperava di farlo
imprimere a Modena coll'assistenza di uno
primi Matematici d'Italia, che suppongo ch
sia il P. Gherli, dimandandomi permissione
accorciare alcuni calcoli. Io risposi, che mio
Fratello era solito di dare alle cose sue quella
maggiore semplicità, di cui eran capaci, e che
perciò non crederei ben fatto il metter mano nell'
originale dell'Autore. Se intorno a questo pa
ticolare potesse darmi qualche notizia, mi ve
rebbe gratissima.

La stampa della mia Lettera nell'ultimo Giornale
l'ho trovata molto corretta. Sono corsi soltanto du
errori alla pag. 64. lin. ..., essendosi stampato lin
A7 in cambio di B7, ed alla lin. 9. AC7 in ve
di BC7. Mi conservi la grazia sua stimatissima
ed offerendomi ai pregiatissimi suoi comandi,
l'onore di protestarmi Di V.S. Ill.ma

Treviso 26. Giugno 1774. Divot. Obbl.mo Ser.

Sig. Ab. Domenico Troili. Modena. Giordano Riccati

Illmo Sig: Sig: Prõ Colmo

1 L. 15

Illmo Sig.r Sig.r Pron Colmo

Ho avuto un grandissimo dispiacere di udire che V.S. Illma si trovi incomodata. Il Sig.r la consoli, e la liberi dal male che la travaglia e in riguardo dei distinti di lei meriti, e a vantaggio, ed onore delle scienze.

A quanto le ho scritto io mi riporto circa ciò, ch'ella mi soggiunge nell'ultima sua pregiatma. Perciò solo, che chi pensa, che non sia $a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = 0$, pensa parimenti che non sia $\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0$ Per me una qtà non può mutar natura p. la semplice aggiunta, o sottraz.e di altra qtà della stessa natura. Per altro mi sembra di aver trovato il vero motivo, per cui il P. Co: Vincenzo domanda con qual giro di calcolo il Sig.r [illegible], e il Sig.r Bernoulli trovino la circonferenza al diametro come $l-1 : \sqrt{-1}$ Per mio divertimento ho steso un foglio, che verrà inserito in qualche gazzetta letteraria su questo punto. Il motivo è quello, che non si può fare il passaggio di $a\,l\sqrt{-1}$ alla qtà $l-1$ uguagliandole fra loro. Ella si degni di continuarmi l'onore della pregiatma sua grazia, e con tutto l'ossequio mi protesto

Di V.S. Illma

Roma primo Luglio 1778

Umo, ed Obblmo Servo vero
Petronio M.a Caldani

per ... tà immaginaria, la quale si annulla quando $x = a$; trovandosi dunque in tal caso un nulla di quantità immaginaria, la curva pel nominato punto

12 15 176

[illegible]

la V–1
retta

ipedibe

a … tola di

… infini…

cura si

rakuno;

…

…

…

…

in facc,

… di

'albo…

…

pei … la quale si annulla quan-
tità immaginaria, la
x = a; trovandosi dunque in tal caso un nulla
di quantità immaginaria, la curva nel nominato
punto

…

All'Illmo Sig. Sig. Pad. Ssmo
Il N. U. Sig. Co. Giordano Riccati

Treviso.

Ella mi onora coi preziosi doni della dotta sua pro=

Ill.^mo Sig.^re Sig.^re Padrone Colmo . 177

Sopra due punti principali si raggira la nostra controver=sia, cioè a dire sopra le due formole $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, $0\sqrt{-1}=0$. Intorno alla prima sembrami, che non si debba disputare; imperciocchè $0+a\sqrt{-1}$ significa ch'io nulla aggiungo alla quantità immaginaria $a\sqrt{-1}$: ma se nulla ci aggiungo, non ho che la sud=detta quantità; dunque $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$.
In riguardo alla seconda, Ella mi accorderà essere $\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$, e perciò $\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=0$: ma $\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=\overline{1-1}.\sqrt{-1}=0\sqrt{-1}$; dunque $0\sqrt{-1}=0$. Tutti i Mate=matici hanno concordemente pensato uguagliarsi $z^2+a^2$ a $\overline{z+a\sqrt{-1}}.\overline{z-a\sqrt{-1}}$, ed anche l'Ab. Vincen=zo nella sua Lettera ammette questa equazione. Abbiamo effettuata l'indicata moltiplicazione $z^2+a^2+\overline{az-az}\sqrt{-1}=z^2+a^2+0\sqrt{-1}$; e quindi $z^2+a^2=z^2+a^2+0\sqrt{-1}$ e $0\sqrt{-1}=0$ per comune consenso degli Analisti.
L'obbiezione dedotta dalla formola $y=\frac{a-x}{a}\sqrt{x^2-a^2}=0\sqrt{-1}$, quando $x=a$, ha la sua forza; imperciocchè se fosse $0\sqrt{-1}=0$, sarebbe $y=0$, e la curva passerebbe per l'ultimo punto dell'ascissa $x=a$. Accioccchè la curva passasse pel detto punto, sarebbe di mestieri, che in essa si annullasse una quanti=tà reale. Osservi il mio Rimo Sig.r Padrone, che o sia $x<a$, o anche maggiore, purchè più picciola di $a\sqrt{2}$, abbiamo sempre $y$ quanti=tà immaginaria, la quale si annulla quando $x=a$. Trovandosi dunque in tal caso un nulla di quantità immaginaria, la curva pel nominato

punto

punto non può far transito. Si cangi ora ipotesi e si faccia $x = a\sqrt{2}$, onde si abbia $y = 1-\sqrt{2} \cdot a$. In tal circostanza se $x < a\sqrt{2}$, ne risulta $y$ immaginaria; se $x > a\sqrt{2}$, $y$ si cangia in reale. Per la qual cosa ad $x = a\sqrt{2}$ ci corrisponde un nulla di quantità immaginaria, ed un nulla di quantità reale, e questa è la ragione, per cui la curva passa pel punto estremo di $x = a\sqrt{2}$, al quale riferendosi i predetti due nulla; si vede chiaramente che l'uno all'altro si eguaglia.

Dopo aver provato essere $0 + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, $0\sqrt{-1} = 0$ si trae la conseguenza, che la formola $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l1$, quando $z = 0$. Che se $z = a$, avremo $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$. Ora $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l1$ esprime l'arco nullo, $\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$ esprime il semiquadrante $= \frac{1}{4}p$; quale sarà l'espressione del quadrante $= \frac{1}{2}p$? Poiché $\frac{1}{4}p = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$, sarà $\frac{1}{2}p = \frac{a}{2\sqrt{-1}} \cdot 2l\sqrt{-1}$. Si troverà il numero, che si riferisce a $2l\sqrt{-1}$, facendo come il [illegible] $= 1 : \sqrt{-1} :: \sqrt{-1} : -1$, ch'è il numero cercato, onde si abbia $\frac{1}{2}p = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l{-1}$. Ma $\frac{1}{2}p = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}\right)$, quando $z = \frac{a}{0}$; dunque

$$\frac{1+\frac{\sqrt{-1}}{0}}{1-\frac{\sqrt{-1}}{0}} = -1,$$

e quindi $0+\sqrt{-1} = -0+\sqrt{-1}$, equazione verissima.

Ella mi onora coi preziosi doni della dotta sua pro=

179

verissima, avendo da principio dimostrato $0+\sqrt{-1}$ $=\sqrt{-1}$. Dalla stessa si deduce $+0=-0$ per confer= mare ciò che ho detto nella precedente mia let= tera, cioè che il nulla è del pari positivo, e negativo, e che non se ne altera il valore can= giando il segno.

Quantunque nei due casi di $z=0$, $z=\frac{a}{0}$ i due numeri $1$, $-1$ siano reali, non sono tali i loro logaritmi, essendo $l1=amp\sqrt{-1}$, $l-1=a\cdot\frac{1}{2}p+mp\sqrt{-1}$. Quando $m=0$, ed $a=1$, si troverà in una circostanza $u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot 0\cdot 2\sqrt{-1}=0$, e nell'altra

$$u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot 2\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}p=\frac{1}{2}p.$$

Il massimo impegno, che mette di sostenere il fratello deve cedere alla verità. Si aggiunga che se il Sig.r Ab. Rossetti ci cogliesse in fallo, canterebbe il trionfo colle sue obbliganti espressioni. Ella ha difesa la sua causa ingegnosamente, dando alle allegate ragioni la massima forza; ma ciò non ostante io non posso recedere da ciò, che stimo evidente.

Ho piacere, che finalmente abbia ricevute le consa= pute stampe, le quali importano L 3: in Veneziana. Ed attendendo i pregiatissimi suoi comandi, col maggiore rispetto mi sottoscrivo

Di V.S. Ill:ma

Treviso 7.. Luglio 1778

Divot. Obbl.mo Serv.e Vero
Giordano Riccati

Ill:mo Sig. Geronimo M.a Caldani Roma.

[illegible] mi onora coi preziosi doni dalla dotta sua produzioni, ed io non ho espressioni bastanti per significarle le mie obbligazioni. La sua lettera del 7. Maggio il Sig. Prof. Stratico me l'ha spedita da Padova quattro giorni fa, e questa è la ragione, per cui io comparisco tardi nella risposta.

[illegible] sandosi nella formola $x^3 - px - q = 0$ la sostituzione $x - y - \frac{p}{3y} = 0$; ~~che comincia da $y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$~~, da Lei dimostrasi, che se i valori di $x$ saranno reali e ineguali, diventava $y$ immaginaria, qualunque radice si sostituisca in cambio di $x$; quando ~~[illegible]~~ essendo l'equazione cubica fornita di radici reali, due delle quali si eguaglino, si trovava $y$ reale, se si sostituisca in luogo di $x$ la medesima radice. Che se due radici siano immaginarie, ne risulta $y$ reale, sostituendo in cambio di $x$ la radice reale. Questa riflessione manifestandola natura della formola Cardanica, [illegible] volgendo il Binomio Cardanico in una serie, alla prova che nel caso irreducibile sarà essa serie sempre divergente, se $\frac{p^3}{27} > \frac{27q^2}{40}$; sempre convergente, se $\frac{p^3}{27} < \frac{20q^2}{40}$; e prima convergente, indi divergente se $\frac{p^3}{27}$ stia dentro i limiti mentovati. Se la serie è ~~[illegible]~~ convergente, la sua

somma

terzo tomo di opuscoli del fu Sig. Fravalli, e avendone domandato al Sig. Avvocato Cagiari, ch'è quegli, a cui allude il Sig. Con. dicendole di volerle fare stampar qui con l'assistenza d'uno de' primi matematici, qual'è certo il detto Sig. Avvocato Professore di Filosofia, ed Analisi in questa Università, egli mi ha risposto, che il Sig. Con. non ha

somma è finita, e negli altri casi ascende all'infinito.

Questo apparente assurdo l'ha obbligata a prendere per mano la teoria delle serie divergenti o nate dalla risoluzione delle frazioni, o dalle potestà rotte dei polinomj, che da lei si maneggia eccellentemente. Egli è un mistero che per esempio la serie $1+x+x^2+x^3+x^4$ &c che non mai finisca, debba uguagliarsi alla frazione $\frac{1}{1-x}$ quando $x>1$; imperciocchè il complemento $\frac{x^n}{1-x}$ va sempre indefinitamente crescendo, nè può mai trascurarsi. Le serie per altro divergenti si possono cangiare in convergenti relativamente alle frazioni, ed alla podestà di indice rotto, usata la permutazione dei membri; per esempigrazia scrivendo $\frac{-1}{-x+1}$ in cambio di $\frac{1}{1-x}$.

Se dalla serie convergente, in cui si risolve la formola del caso irreducibile, si potesse assegnare la somma priva della quantità immaginaria, si avrebbe ottenuto l'intento tanto desiderato

desiderato. Ella ha tentata questa impresa con sommo ingegno, ma nella somma della predetta serie ha potuto schivare gl'immaginarj, e lo stesso è accaduto ai Sig.ri de la Grange, e de' Malfatti. Quindi saggiamente conchiude, che il Binomio Cardanico nel caso irreducibile ha un valore reale sotto forma necessariamente immaginaria, purchè l'equazione del terzo grado benchè fornita di radici reali, ineguali, e incommensurabili, non abbia p, e q irrazionali, e sia priva di un divisore altresì irrazionale.

Ella dimostrato, che si possono far sparire gl' immaginarj nella formola $x^3 - px \pm \frac{p}{n}\left(\frac{n \mp 1}{n} p\right) = 0$, e l'Ab. Vincenzo mio fratello ha provato nel primo Tomo de' suoi Opuscoli, che si risolve l'equazione $x^3 - px + \frac{np}{3} \sqrt{\frac{p}{3}} \cdot \frac{3n^2 - 1}{1+n^2 \sqrt{1+n^2}} = 0$, la cui radice $x - n\sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} = 0$, e le altre due radici $x + \sqrt{\frac{p}{3 \cdot 1+n^2}} \mp n\sqrt{\frac{p}{1+n^2}} = 0$

La sua Opera è piena di merito, e fa somma onore a Lei, e all'Italia, ed io me ne rallegro infinitamente.

Nell'ultimo Giornale di Modena avrà letto la

Terzo tomo di opuscoli del suo Sig. Fratello, e avendone domandato al Sig. Avvocato Cagnani, ch'è quegli, a cui allude il Sig. Con. dicendole di volerle fare stampar qui con l'aggiunta d'uno de' primi matematici, qual'è certo il detto Sig. Avvocato Professore di Filosofia, ed Analisi in questa Università, egli mi ha risposto, che il Sig. Con. non ha

la scoperta da me fatta dell'artifizio, di cui la Natura si serve per far sì, che incitata una corda al suono, siaddatti ben presto ad una curva bilanciata, ed isocrona. Nel Giornale, che presentemente si stampa, determino l'equazione generalissima delle mentovate curve bilanciate. Poi poscia vedere in altra occasione, che la corda nel passare dalla prima posizione alla curva bilanciata ci ha da spendere il tempo di una sua vibrazione, e che perciò non può accomodarsi alla curva semplice di un ventre solo, ma bensì ad una curva composta di uno, e di più ventri atta a rendere un aggregato di suoni, il che colla esperienza puntualmente si accorda. Intorno alli Acustica si raggirano per lo più le mie meditazioni, le quali mi hanno condotto a mettere in chiaro la natura del suono falso, sul quale argomento ho disteso una Dissertazione.

La ringrazio nuovamente del regalo preziosissimo che mi ha fatto, ed offerendomi ai suoi comandi ho l'onore di protestarmi

Treviso 11 Luglio 1776 Di V. S. Ill.ma

Ill.mo Sig. Colonnello Ant. Lorgna
Verona.

Um.mo Dev. Obbl.mo Serv.
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Conte Sig.re Stimatissimo 167 169

Ill.mo Sig.re Sig.re Pad.ne Col.mo 165

Mentre volea scrivarle di non avere ancora ricevuta la risposta all'ab. Suzzi per non differire più tempo a rispondere alla sua gentilissima de' 26 di giugno, ricevo una lettera del Sig. Malfatti, con la suddetta risposta. Le ne do dunque avviso co' miei ringraziamenti, e farò la risposta stampare nel XV. tomo del Giornale. Nel XIV, ch'è per uscire al pubblico, vedrà stampata la sua lettera al Sig. Con. Fenaroli, in cui non solo ho posta una nota per emendare i due errori, ch'erano corsi nella stampa della prima lettera; ma ancora per l'ordine datomi nell'inviarmi altre sue correzioni ho nel §. <u>Alcune chiare sperienze</u>: tolte le parole <u>Abbiamo veduto</u>, sino al fine: nel §. <u>Incitata in qualunque modo</u>: in vece delle parole, <u>nel tempo di una vibrazione</u>, ho poste queste altre, <u>in un tempo brevissimo, che in altra occasione determinerò</u>: ed ho tolto tutto il §. <u>Resta da considerarsi</u>. Così credo di aver fatte nella lettera quelle mutazioni, ch'Ella mi ordinava di farvi.

Il prezzo dell'opera del P. Theuli, del qual prezzo mi domanda, è di tre zecchini e mezzo per gli associati, e mi è stato supposto, che a tal prezzo si darà ancora a quegli, che non sono associati. L'autore è chiamato a Parma per Professore di matematica. Egli stesso ha fatto l'estratto dell'opera, che a qualcuno è comparso in più luoghi poco esatto, e troppo diffuso: la qual cosa ho voluto dirle per sua regola.

Mi sono informato per sapere, se il Sig. Con. Fenaroli avea qui mandato il terzo tomo di opuscoli del suo Sig. Fratello, e avendone domandato al Sig. Avvocato Lagiani, ch'è quegli, a cui allude il Sig. Con. dicendole di volerle fare stampar qui con l'assistenza d'uno de' primi matematici, qual'è certo il detto Sig. Avvocato Professore di Filosofia, ed Analisi in questa Università, egli mi ha risposto, che il Sig. Con. non ha

la scoperta da me fatta delli [illegible], di cui la
Natura [illegible]

186

... mandato qui nulla a stampare. Se manderà il tomo, non si stamperà, se
ch'Ella ne sia preventivamente avvisata.
Mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi dia occasion di servirla, mentre
ringraziandola, e riverendola per parte del Sig. Ab. Tiraboschi, con tutto l'os-
sequio mi confermo
Di V. S. Ill.ma

Modena 24 Luglio 1771.

Dev.mo e Obbl.mo Servit.
Domenico Troili

Ill.mo Sig. Conte Sig.re Stimatissimo 167 169

speditu

Sola di

ino infini

ura si

pat...;

ne sempre prema..

forma

pon.

uco

..ro fuer,

di

alloggia

visitare

...

...

la scoperta da me fatta delli artifizii, di cui la
Natura si servò per far ci[illegible]

All' Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo
Il Sig.re Con. Giordano Riccati

Venezia per Trevigo

Ill.mo Sig. Conte Sig.re Stimatissimo

[Finito] le mie lezioni, io mi son posto a leggere attentamente la sua dissertazione in difesa del fu Chiar. Conte Vincenzo contro le critiche dell'Ab. Pelluti; ed a me è parso, che tutto proceda egregiamente. Mi è piacciuto soprattutto l'estensione, che ella, e l'Abate danno alla scoperta dell'Eulero; e la conclusione, che dalla scoperta medesima ne trae contro di essi, mi sembra, che non ammetta questione. Non intendo però, come ella abbia avuto bisogno di presentare un'equazione alla logistica con tanti cangiamenti di costanti, per avere i numeri positivi e negativi corrispondenti a un dato logaritmo, quando con una piccola rimozione dell'ascissa mi par che ciò si possa ottenere. Sia l'equazione $f\left(\frac{e}{f}\right)^{\frac{ny+1}{nf}} = x$, in cui sia 1 la sottangente, f il protonumero, ed e la solita base. Se l'assunto protonumero f sarà un qualunque moltiplo intero e positivo di 1, noi avremo sempre l'indice pari della radice da estraersi di $\frac{e}{f}$, non obbligandoci alcuna legge a ridurci ai minimi termini dell'esponente $\frac{ny+1}{nf}$, qualora avvenga, che $ny+1$ sia tal pari, che collo schiesamento risulti un dispari nel denominatore. Allora noi abbiamo la solita differenziale $dy = \frac{dx}{x}$ della sud.a equazione, e $y + \frac{1}{n} = l \pm x$, come appunto ella desidera di avere.

sposiedibile [illegible] di [illegible] sono [illegible] [illegible] si [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] si

[illegible] opinione, [illegible] già [illegible] dalla [illegible] più [illegible]. [illegible] la mia [illegible] servitù, e mi do [illegible] di segnarmi

Di V. S. Ill.ma

18 Luglio 1775 Treviso

Umil.mo Devot.mo Obblig.mo Servitor
Giambatista Nicolai

1 5

1 8 8

Terminata la mia lettura, della dissertazione medesima ho fatto un piccolo sbozzo, e l'ho tosto mandato a Modena al Sig.r Abate Troilo, siccome ella mi aveva comandato. Ella scusi, se glie l'ho troppo trattenuta, e ne accagioni di ciò le molte mie brighe, che non mi lasciano goder quella pace e quell'ozio che da tanto tempo sospiro inutilmente. Disponga di me in qualunque altra sua occorrenza, e mi creda a tutte prove col solito ossequio

Di V.S. Ill.ma

Ferrara li 14 Luglio 1774

Dev.mo Oblig.mo Obbid.mo Serv.
P. Franc.o de' Mall[...]

di spedirle

ndola di

iano infini[illegible]

lettera si

sparte[illegible];

prolunga-

in forma

lo prov-

nacuto

Dio faccia,

[illegible] di

[illegible] opinione, per questa ragione [illegible] già abbiamo

dalla parte [illegible] più essenziale. Intanto la prego la mia [illegible]

servitù, e mi do l'onore di segnarmi

Di V.S. Ill.ma

18 giugno 1775 Treviso

Umil.mo Devot.mo Obbl.mo Servitore

Giambattista [illegible]

15

Non avendo ritrovato in Treviso V. S. Illustriss. mi prendo la libertà di spedirle costì la prima parte del mio piccolo lavoro ai Giovani, pregandola di esaminarlo con suo agio, e di venire sinceramente il suo giudizio, che stimo infinitamente, e da cui dipenderò. Forse le sarà troppo noiosa una lettura sì lunga: ma la sua benignità altre volte provata mi fa sperare compatimento; promettendomi molto a non mettere più in pubblico cosa di tanta importanza. Io stesso ho da ridurre alcune cose; e particolarmente di dare miglior forma ai §§ 127. 128. 133: come ho notato: ma differisco di far ciò prevedendo non lusingarmi di non avere preso sbaglio nei miei principj. Avrei voluto personalmente costì ad inchinarla, ma un picciolo viaggio, che devo fare, per ora non me lo permette. Nel mio ritorno lo farò bensì, desideroso di sentir la sua opinione, per poter intraprendere il lavoro già abbozzato della parte seconda più essenziale. Quanto le protesto la mia sincera venerazione, e mi do l'onore di segnarmi

Di V. S. Illustriss.

18 Luglio 1775 Treviso

Umiliss. Devotiss. Obbligatiss. Servitore
Giambattista Nicolai

Dalla mia seconda Parte in cui tratto de' logaritmi delle
[quan]tità immaginarie, ora ne sia ora solamente abbozzata, ne cavo
le seguenti conseguenze. Primieramente perchè la equazione
$\dot{z} - n\dot{z} = 0$ ( questa è la mia equazione [illegible], che dimostra
[illegible] per l'altra abbracciare i sistemi de' numeri positivi e negativi,
[e gl']infiniti d' immaginarj, in cui [illegible] precisamente, ma
[la] base, z la prima ordinata infinitesima prossima al primo
[illegible] infinitesimo) ci somministra infiniti valori di z due reali
[u]guali l'uno positivo e l'altro negativo, ed infiniti altri
[im]maginarj, infinite saranno le linee geometriche delle ordinate
[gene]rate dalla stessa equazione: di modo che le due reali
[u]guali una l'una positiva e negativa l'altra costituiscono
[le] due rami continui reali della logistica l'uno di qua
l'altro di là dall'asse, eguali, simili, e similmente posti:
l'altre poi serie tutte infinite composte di ordinate reali
[ed] immaginarie costituiscono di qua e di là dall'asse una
[infinità di pu]nti solitarj quando sono le ordinate reali che dalle
[dist]anze delle immaginarie vengon all'origine. Quindi la stessa
[eq]uazione, o lo stesso luogo esige, che ad ogni logaritmo
[corr]isponda un numero infinito di numeri, poichè ad ogni
[nu]mero, che n'è il logaritmo, corrisponde un infinito numero
[di] ordinate parte reali parte immaginarie che rappresentano i

nomeri. Ogni adunque equazione canonica comprende sotto di sè un infinito numero di sistemi esponenziali, ossia di lince geometriche, a cui corrisponde lo stesso sistema di logaritmi.

Se ne deduce in secondo luogo, che qualunque sottangente reale io assuma ad arbitrio nel sistema esponenziale reale; nello soddisfare essa all'equazione proposta $z^2-na=0$ e non soltanto di luogo a luogo deve necessariamente cangiare la sottangente a tutti gli altri infiniti sistemi della z imaginaria, assumendola tale che nella equazione infinitesima $\partial\lambda = c\,\partial w$ (chiamo $\partial\lambda$ la distanza di z, dal protonumero, eguale ad $\frac{\partial w}{}$ fatta $\partial w$ distanza della base sa dal protonumero* a) si conservi costante la $\partial\lambda$, da cui nasce la costanza e identità del sistema logaritmico, e che perciò tali sottangenti debbono essere necessariamente imaginarie, e tali, che non turbino la equazione infinitesima $\partial\lambda = c\,\partial w$ da principio assunta. Per la qual cosa noi abbiamo con ragione chiamato il sistema reale esponenziale, sistema Dominante, posto il quale abbiamo cavato tutti i logaritmi degli altri ad esso subordinati di sottangente imaginaria. Sebbenchè adunque sia arbitraria la sottangente in ogni sistema reale, o Dominante, non lo è però ad arbitrio nei subordinati nei quali conviene determinarla, come sono il sistema Dominante, e le ordinate z imaginarie. E siccome

* $\partial w = \frac{z-a}{a}$; — perciò $a\partial w$ differenza minima della z dal protonumero a.

ogni quantità imaginaria si può ridurre all'espressione $a+b\sqrt{-1}$, e conseguentemente contenersi in un'equazione di simil forma $z^2+az=0$, in cui, posto z pari, due sono le radici reali; si conchiude, che se non si guarda a consiglio imaginario il logaritmo delle quantità reali, ossia del sistema *dominante*, non può in nessun modo essere imaginario il logaritmo delle imaginarie, ossia dei *sistemi subordinati imaginarj*, le cui ordinate sebbene imaginarie corrispondono ad un dato real punto di assissa. Questa avvertenza non ancora conosciuta dai Geometri è stata cagione degli equivoci essenziali in tali ricerche, i quali riducendosi di qualunque sostanza reale arbitraria in sistemi di base imaginaria anno dato di piede a contraddizioni da cui nascono misterj incomprensibili. Da l'onore di dimostrato avere reale la erronea proporzione tra il diametro e la circonferenza la prima volta ritrovata dal Signor Sig.r Giovanni Bernoulli, ed ammirata dai più valenti Geometri come una scoperta delle più ingegnose del calcolo analitico.

Questa è dunque la essenzial differenza che passa fra i sistemi reali ed imaginarj in questo proposito. Che cioè trattandosi di numeri reali, ogniqualvolta si passa da sostanza a sostanza cioè da equazione ad equazione, da luogo a luogo, da sistema aritmetico a sistema logaritmico. All'incontro, quando si tratta

di numeri imaginarj, per star saldi nella medesima equazione, nel medesimo luogo, e nello stesso sistema logaritmico, è necessario cangiar sottangente ogni qualvolta si cangia il valore imaginario di z, valore però che deve esser compreso fra il numero infinito delle radici imaginarie della general equazione.

Appoggiato su tali conseguenze, che credo legittimamente dedotte dal mio metodo, dimostro che tutti i diversi infiniti logaritmi, che si attribuiscono al protonumero e cioè all'unità, nascono dal non aver determinate le legittime sottangenti, che competono a ciascuna espressione della z imaginaria, la quale è in questo caso $= 1 + d\omega\sqrt{-1}$: in cui dee essendo elemento d'infiniti archi determina infinite sottangenti, siccome infinite basi. Dimostro di più che essendo in questo caso l'espressione generale d'ogni ordinata $= z^m = k^{\frac{m}{f}} \cdot a = \overline{1 + m d\omega\sqrt{-1}} \cdot a$, posto $m=0$, avremo il protonumero $= z = k^0 \cdot a = 1^0 \cdot a = \overline{1 + 0 d\omega\sqrt{-1}} \cdot a$, che sempre compete il logaritmo $\frac{0 \cdot f}{z} = 0$, denominata f ovvero la sottangente, giacchè ho dimostrato il logaritmo di z, $= \frac{m f}{dz}$, e che finalmente $1^{\sqrt{-1}} = 1 + 0 \cdot d\omega\sqrt{-1} = 1 + 0 \cdot \sqrt{-1}$ c[ioè] un'espressione, che parlando assolutamente non si deve confondere colla semplice unità.

Ma perchè il accerrimo sig. Eulero in una Dissertazione negli Atti di Berlino an. 1749 adotta il sentimento contrario, e crede in ...

invincibilmente dimostrato, sono in necessità di esporre quelle ragioni per cui non posso dichiararmi del suo partito. In questa l'incomparabile Autore dopo avere esposte le opinioni del Sig.r Bernoulli e del Sig.r Leibnizio con le ragioni, che le sostengono, e dopo di avere fatto vedere (come ei dice) le vere e reali contradizioni, a cui ciascuna invariabilmente va incontro, rimontando a più alti principj appoggia la sentenza Leibniziana sopra un teorema fondamentale, da cui ne fluiscono tre primarj Problemi che esauriscono totalmente la materia.

Il Teorema dimostra che ciascun numero proposto è dotato d'una infinità di logaritmi. Dopo ciò si avanza nel p.o Problema a ritrovare tutti questi logaritmi presso il numero affirmativo e.g. a, il quale essendo = 1.a, ne nascerà di conseguenza, che la $l.a = l.1 + la$, ossia ciascun logaritmo dello unità aggiunto al logaritmo reale di a, darà un logaritmo del numero proposto a. Ma l'unità positiva (come dimostra) à infiniti logaritmi, espressi dalla formola generale $\pm\, 2\lambda\pi\sqrt{-1}$, in cui λ un numero intero qualunque e π la semicirconferenza; dunque ciascun numero affirmativo à infiniti logaritmi, uno reale, tutti gli altri imaginarj.

Con lo stesso progresso ritrova nel secondo Problema il logaritmo di un numero negativo qualunque $-a = l{-1} + la$. Ma l'unità negativa à infiniti logaritmi tutti imaginarj espressi dalla formola generale $\pm\, \lambda\pi\sqrt{-1}$ [illegible]; adunque tutti gli infiniti logaritmi dei numeri negativi sono tutti imaginarj.

Nel terzo Problema finalmente dimostra, essere i logaritmi di ciascun numero imaginario della forma $a+b\sqrt{-1}$, espressi dalla formula $\overline{\phi \pm m\pi}\sqrt{-1}$, in cui $\phi$ è l'arco corrente del seno $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, coseno $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e perciò tutti imaginarj.

Ecco in compendio tutto il progresso della Dissertazione del [illegible] Calcolo, la quale è direttamente opposta a quanto abbiamo noi creduto di dimostrare: nascendo dalle nostre premesse per legittima necessaria conseguenza, che ad ogni logaritmo corrispondono infiniti numeri in ogni sistema, due soli eguali, l'uno positivo, e l'altro negativo, e tutti gli altri imaginarj; nel mentre che l'Autore pretende tutto al rovescio, che ad ogni numero corrispondano infiniti logaritmi. L'opposizione così diretta di queste due sentenze non ammette la loro riconciliazione. Il metodo poi, che mi conduce, se di gran lunga non erro, mi à fatto toccar con mano l'evidenza, e convincere, che il Teorema principale, in cui è appoggiata la sentenza dello stesso Autore non è altrimenti indifferente [illegible] come lo dice egli nel suo Teorema: chiamato da esso il numero $y$, il suo logaritmo $x$, e adottato generalmente da lui il sistema iperbolico della sottangente $c=f=a=1$, pone $y=n^m=\overline{1+mdo}^{\,1}$ (mi servo dei miei simboli), da cui si cava (a): $y^{\frac{1}{m}}-1=\pm mdo$, e poichè $ly=x=\pm mdo$, sostituendo i[l]

quest'equazione il valore di [illegible] ricavato dalla prima, nasce la (2): $ly = x = qy^{\frac{1}{q}} - q$. Fin qui in tale ipotesi tutto regge. Ma si soggiunge, $y^{\frac{1}{q}}$, essendo $q$ infinito, ha infiniti valori, dunque $ly = x = qy^{\frac{1}{q}} - q$ avrà infiniti valori: dunque il solo numero avrà infiniti logaritmi. Io però accordo la prima conseguenza, cioè $x = qy^{\frac{1}{q}} - q$ abbia infiniti valori: ma niego assolutamente la seconda, che cioè un solo determinato valore di $y$ abbia infiniti logaritmi. Perchè variato il valore di $y^{\frac{1}{q}}$, per cui si cangia il logaritmo, si deve anche cangiare necessariamente il numero. Infatti se si ponga v.g. $y^{\frac{1}{q}} - 1 = d\phi$, onde il logaritmo $= qd\phi$, poichè in questo caso la (1) diviene $y^{\frac{1}{q}} - 1 = d\phi$, ossia $y^{\frac{1}{q}} = 1 + d\phi$, ed $y = \overline{1+d\phi}^{q}$ che certamente non può essere quel di prima, cioè $= \overline{1+[illegible]}^{q}$, se $d\phi$ non si eguaglia ad [illegible]. La dimostrazione adunque dello Autore a ben considerarla a ciò in fine non prova, se non che cangiandosi il numero si cangia il logaritmo, e viceversa, e che conseguentemente ad ogni numero non vi è che un solo logaritmo, nello stesso sistema. Il che deve necessariamente succedere quando si voglia preservar nello stesso sistema reale della sostanza e come è stato da me dimostrato.

In oltre nel 1°, e secondo Problema per trovare gli infiniti logaritmi, che in ciascuno del 1° Teorema corrispondono tanto a +1, che a −1, presa l'equazione superiore $x = gy^{\frac{1}{g}} - g$, da cui nasce $1 + \frac{x}{g} = y^{\frac{1}{g}}$, e $(1+\frac{x}{g})^g = y$, pone nel primo caso $y = 1$, nel secondo $y = -1$: adunque $(1+\frac{x}{g})^g \mp 1 = 0$. Quest'equazione, fatto $1+\frac{x}{g} = p$, si cangia nella seguente $p^g \mp 1 = 0$, la quale secondo l'Autore ci fa sapere nel primo caso essere $x = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$; nel secondo $x = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$: dal che si deduce, che nel primo caso l'unità positiva non ha che un logaritmo reale $= 0$, e tutti gli altri imaginarj; la negativa poi è affetta da logaritmi tutti imaginarj.

Ma mi sia permesso anche qui per amore della verità esporre liberamente ciò, in cui credo pecchi questo raziocinio. Presa l'equazione $x = gy^{\frac{1}{g}} - g$, e fatto $y = \pm 1$, si avrà $x = g(\pm 1)^{\frac{1}{g}} - g$. Ora io dico, che qualunque sia g, purchè infinito, la radice $(\pm 1)^{\frac{1}{g}}$ non può essere, che esattamente l'unità, e che perciò nell'uno, e nell'altro caso $x = g(\pm 1)^{\frac{1}{g}} - g = g - g = 0$, e conseguentemente che il logaritmo, tanto del +1, che del −1 è eguale al zero. Imperocchè se si riflette che y rappresentando sempre un numero esponenziale di base costante, non può esso mai (se non nel solo caso della base eguale all'unità, caso da me già esaminato, che ora non fa al nostro proposito) divenire eguale all'unità, se l'espo

...ia zero; posta la base $n$, e fatto $y = n^m$, il mio metodo immaginario ... $n^{\frac{m}{2}} = 1 + m\,d\omega = 1 + \frac{mx}{2}$, e fatto $m=0$, $n^{\frac{0}{2}} = \pm 1 + 0\,d\omega$, come è dimostrato. Fatto dunque $h$ esponente di $y$, quando si agguaglia ad $n^{\frac{0}{2}}$, sarà $y^{\frac{h}{2}} = n^{\frac{0}{2}}$ da cui si cava $h=0$, cioè esponente da cui deve essere affetto $y$ in questa supposizione, il quale perciò sarà $y^{\frac{0}{2}}$, non ... vuole lo Autore $y^{\frac{1}{2}}$. La vera adunque equazione (in) questo caso è $\pm 1 \cdot \sqrt{1 + 0 \cdot d\omega} = \pm 1 \cdot \sqrt{1 + \frac{0 \cdot x}{2}} = y^{\frac{0}{2}}$, in (cui) $\frac{0 \cdot x}{2}$, che rappresenta il logaritmo sarà sempre eguale al zero: poichè è dimostrato essere $\pm\sqrt{1 + \frac{0 \cdot x}{2}} = \pm 1 \cdot \sqrt{1 + \frac{x}{2}}^{\,0} = p^0 = y^{\frac{0}{2}}$ $\pm 1$, qualunque valore di $p$ e per conseguenza di $x$ risulti dall'equazione $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = p^2 = y = n^m$.

Passo poi all'ultimo Problema, in cui trova infiniti (logar)itmi imaginarj corrispondenti ad ogni numero imaginario ... dallo equazione $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = y = \left(1 + \frac{\phi\sqrt{-1}}{2}\right)^2$, che dico, che (ave)ndo lo Autore sempre fissa la ipotesi del sistema iperbolico, (in c)ui i minimi accrescimenti dei logaritmi sono eguali ai mi(nimi) accrescimenti dei numeri, non è meraviglia se fatto ima(ginar)io il minimo accrescimento del numero, e per conseguenza (il n)umero stesso, riesca egli pure imaginario il suo logaritmo: (es)igendo necessariamente la ipotesi accennata. Ma io ò fatto ... che trattandosi di numeri imaginarj per non cangiare la

equazione fondamentale, che ne dirige il sistema, è necessario cang[iare] la sottangente di reale, eguale in questo caso all'unità, in imaginar[ia] e tale quale viene ricavata dal calcolo. L'equazione adunque dello Bernoulli per esser legittima deve così modificarsi

$\left(1+\frac{x}{2h}\right)^h = \left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{2}\right)^h$, ossia $1+\frac{x}{2} = 1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{2}$, in cui $\frac{x}{2}$ è il logaritmo di $\frac{\varphi\sqrt{-1}}{2}$, ed $x$ il logaritmo di $\left(1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{2}\right)$

Dal che si vede facilmente, che non può cangiarsi il logaritm[o] nello stesso sistema d'imaginarj se non si cangia anche il [n]umero e che perciò non può corrispondere allo stesso numero [ima]ginario che un solo logaritmo reale.

Sebbene nella mia seconda Lettera rimoverò di proposito la
realità dei logaritmi delle quantità imaginarie, accennarne voglio di
passaggio in questa mia prima, che unicamente tratta dei logaritmi
delle quantità reali; pure stimo qui necessario prevenire, e rispon-
dere ad un' obbiezione, che potrebbe tenere in sospeso l'animo di
chi legge intorno alle verità già stabilite, e mettere in sospetto
qualche nascosto paralogismo nel metodo, che maneggio. Si
potrà ultimamente facilmente opporre, che essendo di eterna
verità la formola $\frac{c\,dy}{y} = dx$ esprimente gli elementi dei
logaritmo suggeritaci dal metodo comune, se si ponga $y$
imaginario, sarà certamente imaginario anche il suo
elemento $dy$. Quindi posto invece di $y$, $y\sqrt{-1}$, e in luogo
di $dy$, $dy\sqrt{-1}$, sarà $\frac{c\,dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = \frac{c\,dy}{y}$ reale e per conseguenza
$\frac{c\,dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = dx$ reale, perchè lo sia reale la sottangente. E che
all'incontro, come vuole il mio metodo, facciasi e imaginarj
ambi $\frac{c\,dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = \frac{c\,dy}{y} = dx$ elemento imaginario, conchiudasi
direttamente opposta alla realità dei logaritmi dei
numeri imaginarj, da me sostenuta, ma non può in veruna
maniera accordarsi colla altra supposizione da me fatta
della sottangente imaginaria.

Ma prima d'ogni altra cosa rivolgendomi dalla stessa ob-
biezione, chieggo a chi così mi obbiettasse, come con fronte
della indicata formola, supposta e reale, possa egli difendere

la comune sentenza, che vuole immaginarj i logaritmi dei numeri immaginarj? Perchè se $\frac{dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}}$ è reale, ossia la cotangente reale, sarà pure reale $\frac{c\,dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}}$, e per conseguenza il suo loga-ritmo. Per la qual cosa se fosse legittima la obbiezione, ci ridurrebbe amendue nello stesso tempo a mal partito. Poichè o io sarei costretto, volendo sostenere la immaginarietà della cotangente, confessare la immaginarietà dei logaritmi dei numeri immaginarj da me contrastata; e il difensore della antica sentenza colla realità della cotangente accordare anche la realità dei veri accennati logaritmi universalmente rigettata; oppure appigliandomi alla realità dei logaritmi suddetti abbandonare mai sempre il mio metodo la realità della cotangente, ed all'incontro il sostenitore della comune opinione, volendo salda la immaginarietà dei logaritmi, sarebbe costretto concedermi a viva forza la immaginarietà della cotangente; e qualunque partito però ci piacesse appigliarci, non potremmo in niuna maniera liberarci da contraddizione, ed errore.

Conchiudo dunque, che la equivocazione sta nascosta nella obbiezione stessa, che amendue i partiti nello stesso tempo ... Io per me facilmente mi traggo d'impaccio, avvertendo, che lo equivoco consiste nel supporre generalmente in tutti i casi y immaginario, la espressione $\frac{dy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}}$ reale: quando che in ...

...ragonanza la imaginarietà dei numeri d'altronde non possa nascere, ...va dal moltiplicare una quantità reale nel fattore imaginario $\sqrt{-1}$. Il che generalmente è falso.

Io ho assunto il fattore generale della mia equazione canonica $z^2 - \ldots z + n^{\frac{2}{n}a} = 0$, ne cavo nella mia seconda parte $= n^{\frac{1}{2}}a \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{2}$ e giacchè $n^{\frac{1}{2}} = \ldots$, $z = \sqrt{1 + d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}} \times a$

...espressione della $z$, cioè della prima ordinata infinitamente ...ssima al protonumero, quando diviene imaginaria: da ...ui si cava $\frac{z^2}{a^{2-1}} = \sqrt{1 + d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}}^{\,2} \cdot a$ eguale alla base, ...chiamo $= (n)a$. Quindi generalmente ogni numero ...ibile imaginario sarà $(n)^{\frac{m}{n}} \cdot a = \sqrt{1 + d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}}^{\,\frac{m}{n}} \cdot a$, cui ...mello, che comunemente si pone $= y$.

Differenzio col mio metodo la formola, e trovo

$$(n)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}} \cdot a - (n)^{\frac{m}{n}} \cdot a = (n)^{\frac{m}{n}} a \left( (n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = (n)^{\frac{m}{n}} \cdot a \cdot \overline{d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}}$$

...la qual cosa $\frac{dy}{y} = \frac{(n)^{\frac{m}{n}} a \cdot \overline{d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}}}{(n)^{\frac{m}{n}} a} = d\omega \pm \frac{\rho\lambda\epsilon\sqrt{-1}}{\rho^a}$.

...esta formola mi fa conoscere, che se io esprimo il numero ...maginario come ricerca necessariamente la sua natura, e non ...capriccio, $\frac{dy}{y}$ è sempre quantità imaginaria: e che per ...nseguenza posta c imaginaria, e di quel calore che ricerca ...mio metodo, troverò sempre (siccome lo dimostro) $\frac{dy}{y} = dn$ ...ntità reale.

...Il solo unico caso, in cui si accorda ciò che generalmente ...pone la obbiezione, è quando $\lambda = 0$, onde $y = \overline{1 + d\omega}^{\,\frac{m}{n}} \cdot a = n^{\frac{m}{n}} \cdot a$

n.° 4.

reale; $cy = n^{\frac{m}{r}}a$ sin pacimenti reale: e moltiplicando per $\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1} = n^{\frac{m}{r}}a\sqrt{-1}$; $cy = \cos n^{\frac{m}{r}}a\sqrt{-1}$ imaginarj. Ma

$$\frac{cy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = \frac{n^{\frac{m}{r}}a\sqrt{-1}\cdot\sin}{n^{\frac{m}{r}}a\sqrt{-1}} = \sin$$

quantità reale. cioè quando il [illegible] divien imaginario in grazia del protonumero imaginario. Ciò succede qualora i termini tutti della serie geometrica reale vengono moltiplicati pel comune fattore imaginario $\sqrt{-1}$: nel qual caso la cotangente sussiste reale.

Ma è tanto lontano, che questo caso particolare si opponga al mio metodo, che anzi nella mia formola generale della tangente reale, cavando generalmente la ~~[illegible]~~ quantità a indicante il protonumero, mi imparavo che il valore della cotangente non dipende nè punto nè poco dal protonumero che per conseguenza, sebbene egli diventa imaginario, ella nondimeno sussiste qual era prima.

Farò poi la cura di liberarmi dalla forza delle obbiezioni agli oppositori, i quali a ben intendere nascono da quella loro contrarj, che adoprano contro il mio metodo. Perchè non cangiano di situazione i termini di una serie geometrica reale perchè* sia il comun fattore, da cui vengono affetti, egli è intelligibile una serie in ordine disposti non ponno essi mancare di [illegible] [illegible]ssimo, chè altra cosa non significa che la distanza del protonumero, facendo però il fattore imaginario della forma da cui volu[illegible] no costretti a confessare [illegible] [illegible] imaginarj da essi proposti.

* per qualunque comune quantità vengono poi moltiplicati.

Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Col.mo 207 221

La approvazione, con cui Ella ha onorata la mia Dissertazione, mi rende sicuro di non avere preso da

Cav. Fratello 205

dovere ricevuto un involto con una lettera del Professore Nicolai. Egli è stato qui jeri l'altro per parlar con voi di una sua scoperta di calcolo che in parte trovarete abbozzata nelle carte speditevi; se egli non prende qualche sbaglio in verità che ha ritrovato il filo per uscire dal labirinto.

Questo Maestro Nolte, avendo inteso che a Bassano si fa il mese venturo una solennità ecclesiastica per la Canonizazione di una santa di quel paese, desiderarebbe di essere prescielto per Maestro della Funzione. Ma se fossero impegnati, o cercassero uomo di maggior riputazione; egli si contentarebbe di aver luogo anche fra i tenori. Parlate con cotesto Sig.r Barisani, se fosse possibile d'impiegarlo. Bisogna per altro farlo comparire come due persone; perchè il Maestro che si degni di cantare mi pare un paralogismo in Musica. State sano. Addio

Treviso 20 luglio 1774

Vostro Aff.mo Fratello
Franco Riccati

204.

reale; $\partial y = n^{\frac{m}{4}} a\, Sw$ parimenti reale; e moltiplicando per $\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1} = n^{\frac{m}{4}} a\sqrt{-1}$; $\partial y = Sw\, n^{\frac{m}{4}} a\sqrt{-1}$ immaginarj. Ma

$$\frac{\partial y\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = \frac{n^{\frac{m}{4}} a\sqrt{-1}\cdot Sw}{n^{\frac{m}{4}} a\sqrt{-1}} = Sw$$ quantità reale. [illegible]

[illegible] immaginario in grazia del [illegible] immaginario. Ciò [illegible]

206

* [illegible]

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo

L'approvazione, con cui Ella ha onorata la mia Disser=tazione, mi rende sicuro di non avere preso da'

n.o 4

reale; $oy = n^{\frac{m}{\pi}} a$ Sw parimenti reale: e moltiplicando per $\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1} = n^{\frac{m}{\pi}} a\sqrt{-1}$; $oy =$ Sw $n^{\frac{m}{\pi}} a\sqrt{-1}$ immaginarj. Ma

$$\frac{oy\sqrt{-1}}{y\sqrt{-1}} = \frac{n^{\frac{m}{\pi}} a\sqrt{-1} . Sw}{n^{\frac{m}{\pi}} a\sqrt{-1}} = Sw$$

parimenti reale: cioè pensando il circolo immaginario in grazia del protonumero immaginario. Ciò ...

Al Nobile Sig.re Sig.r Co: Giovanni Riccati
Sig.re Sig.re Padrone Colendiss.mo

Castelfranco

# ne qui
...

L'approvazione, con cui Ella ha onorata la mia Dissertazione, mi rende sicuro di non avere preso de' sbagli; il che mi serve di conforto; e mi lusinga di non aver mal difesa la causa del Fratello contro l'obbligantissimo Sig.r Ab. Lessuri.

La vera equazione esponenziale della logistica è $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$, salva la condizione, che le coordinate $g$, $h$ siano infinitiformi, cioè a dire capaci di infiniti valori relativi. Facendo stabilmente $g = a$ ; $h = f$, ed escludendo tutte le altre coordinate, non ci dobbiamo maravigliare, che non ne risulti il ramo dei numeri negativi. Lo stesso numero negativo viene determinato da infinite coppie di coordinate; e quindi la formola esponenziale ha tutta l'estensione, di cui è capace, dato il protonumero $f$, quando $g$, $h$ sono infinitiformi.

Infatti per altro, che se al numero $g$ ci corrisponda il logaritmo $h$ eguale ad un numero pari, questa sola coppia di coordinate è valevole a darci l'intero ramo dei numeri negativi, onde si abbia $f\left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = f\sqrt[h]{\left(\frac{a}{f}\right)^{y}} = \pm x$. Ella nota da par suo, che niuna legge mi obbliga a ridurre ai minimi termini l'esponente $\frac{y}{h}$, qualora avvenga, che $y$ sia tal pari, che collo schiacciamento risulti un dispari nel

tra $0 = a\sqrt{-1}$. Di fatti si avrà $0 = a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = a - a\sqrt{-1}$; dunque $\frac{0}{a-a} = \sqrt{-1} = \frac{0}{0}$ intollerabile per alcuni, e tra questi il Sig. Eulero credesi $\frac{0}{0} = 1$; dunque $1 = \sqrt{-1}$. Da tutti questi assurdi ci libereremo se si farà $0\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, come richiede la natura della nota frazione, e quella delle quantità immaginarie, che per quanto [illegible]

nel denominatore. Per ischivare l'obbiezione, che per questo motivo poteva esser mossa, ho stabilito che debba essere y : h come il numero impari m al pari n. Profittando dei suoi dotti suggerimenti aggiugnerò alla Dissertazione alquante righe, cui esprimerò ottenersi coll'equazione $\frac{l}{}\left(\frac{y}{}\right)^{\frac{1}{h}}$ amendue i rami della logaritmica, assegnato alle coordinate y, h un valore costante, purchè il logaritmo h s'eguagli ad un numero pari.

Ora copio cinque Lettere dell'Ab. Vincenzo intorno ai logaritmi dei numeri negativi scritte l'anno 1765 che penso di far imprimere nel Giornale di Modena contenendosi in esse delle cose assai interessanti.

Il Sig.r Colonnello Lorgna mi ha spedito in dono la sua bell'Opera intorno alla risoluzione delle equazioni del terzo grado, nella quale fa menzione di Lei colla ben dovuta lode. Questo è un Valentuomo, che fa onore all'Italia.

Mi conservi la sua buona grazia, e corrispondenza, ed esibendomi a' pregiatissimi suoi comandi ho l'onore di rassegnarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 22. Luglio 1776.

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara.

Divot. Obbl.mo Serv.r V.o
Giordano Riccati

cha

rdo,

,

);

ue

che

li

cali

$\sqrt{-1}$

$-1$

lie

diversi

o'

egli

sia $0 = a\sqrt{-1}$. In fatti si avrà $0 = a\sqrt{-1} - a\sqrt{-1} = \overline{a-a}\sqrt{-1}$; dunque $\frac{0}{a-a} = \sqrt{-1} = \frac{0}{0}$
indotto per alcuni, e tra questi il S. Eulero credesi $\frac{0}{0} = 1$; dunque $1 = \sqrt{-1}$
Da tutti questi assurdi ci libereremo se si farà $0\sqrt{-1} + a\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$, come richiede la
natura della nota frazione, e quella delle quantità immaginarie, che per quanto

# [illegible]
[illegible]

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo 209

L'autorità di V.S. Ill.ma, e quella degli altri matematici dovrebbe farmi tacere sulla nota controversia. Ma vorrei, che l'autorità si accordasse colle dimostrazioni, accordo, che io non ho saputo per anche ritrovare. Tanto l'equazione $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, quanto quella di $0=0\sqrt{-1}$ non so vederle vere. Dalla prima si deduce la seconda; la seconda si dimostra impossibile per l'analogia di $0:0\sqrt{-1}::a:a\sqrt{-1}$; dunque anche la prima dee essere impossibile. Il dire, che $0+a\sqrt{-1}$ significa, che nulla non dee aggiungersi alla quantità immaginaria, e che però sia lo stesso, che $a\sqrt{-1}$ solo, che non sia un'asserzione sicura. Il zero poi dà sempre l'origine reale d'una quantità reale, nè la dichiara impossibile, laddove l'immaginario $a\sqrt{-1}$ non può avere per se nessuna origine reale; onde altro è $0+a\sqrt{-1}$, altro è $a\sqrt{-1}$. Aggiungasi, che $L\,\overline{0+a\sqrt{-1}}$ è infallibilmente diverso dal $La\sqrt{-1}$, come si raccoglie dal ricavarne i valori per mezzo delle serie, come generalmente $L\,\overline{z+a\sqrt{-1}}$ è diverso da $La\sqrt{-1}$. Che se io vorrò calcolare, come ho visto calcolare alcuni, ridurrò l'equazione $0+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$ ad un assurdo anche più manifesto di quello che sia $0=0\sqrt{-1}$. In fatti si avrà $0=a\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}=\overline{a-a}\sqrt{-1}$; dunque $\frac{0}{a-a}=\sqrt{-1}=\frac{0}{0}$ inoltre per alcuni, e tra questi il V. [illegible] vuolsi $\frac{0}{0}=1$; dunque $1=\sqrt{-1}$. Da tutti questi assurdi ci libereremo se si farà $0\sqrt{-1}+a\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}$, come richiede la natura della nota frazione, e quella delle quantità immaginarie, [illegible]

aggiunte, o sottrazioni soffrano, mai diventar non possono reali; perchè la sottrazione, o l'addizione non fa cangiar natura alla quantità. Quindi chia[ro] vede, come in altro mio parmi d'aver accennato, che essendo $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ n[on] per questo dee dedursi $\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 0$, ma $\sqrt{-1} - \sqrt{-1} = 0\sqrt{-1}$

Quanto all'equazione della proposta curva io non veggo, come fatta $x = a\sqrt{2}$ div[enga] $y$ immaginaria; trovo bensì $y = \frac{a - a\sqrt{2}}{2a}\sqrt{2a^2 - 2a^2} = 0$, e trovo, che questa [non] ricavasi $y = 0\sqrt{-1}$. Così infinite altre curve potremo trovare, che diano l'ordinata espressa per $0\sqrt{-1}$, dal che però non dee raccogliersi, che in[...] sia incontrato l'asse della curva.

Io non posso concedere nemmeno, che il numero, il quale si riferisce alla quantità $a L\sqrt{-1}$ sia $= -1$. Per me $a L\sqrt{-1}$ è quantità immaginaria come l'è pure pel Sr. Pepoli, nè potrà pertanto servire di logaritmo al numero $-1$ quantità reale, e così essere $a L\sqrt{-1} = L-1$

Quando mi è giunto l'ultimo di lei pregiatissimo foglio era già sotto il tor[chio] quel poco, che dissi di dire in difesa del Sr. Co: Vincenzo. Avrebbesi p[...] potuto dir di più assai, ma non si sarebbe incontrata l'approvazione degli analisti perchè si sarebbero rovinati, e rendute inutili molti di[...] loro fatiche

* [illegible]

La novità, che non sussista $o = o\sqrt{-1}$ io l'accenno solam.te in quel poco, che ho pubblicato, a guisa di dubbio, e mi appoggio all'analogia $o : o\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$, la qual però bisogna dimostrar falsa, se non regge la mia opinione. Non darei per questo dispiacer tanto. Dopo di aver dato alle stampe due miei fogli sopra il libro di S.r Pesuti, mi fu fatto vedere un libretto di un tal S.r Ab.te Calandrelli Profess.re nel Collegio romano, ch'egli ha dato alla luce sotto l'assistenza del P. Jacquier contro il med.o S.r Pesuti sopra la pretesa proporzione Bernoulliana. Ho avuto la consolazione di veder alcune cose mie confermate in questo libretto, le quali sono di massima importanza. Mi farò un pregio di servirla quanto prima di un esemplare di d.o libretto, e le manderò ancora un esemplare di ciò, che ho pubblicato. Mi onori della continuazione della preziosa sua grazia, e con tutto l'ossequio mi protesto

di V.S. Ill.ma

P.S. In questo punto, che sto chiudendo la presente mi giunge l'esemplare del S.r Calandrelli, e però lo invio a V.S. Ill.ma unitam.te alla mia stampa.

Roma 27 Luglio 1776

Umil.mo, ed Obblig.mo Serv.e
Petronio M.a Caldani

212

[illegible]

È molto tempo, che sono privo di notizie dell'[illegible] Sig.
Co. Girolamo Riumo, che desidero abbia sempre mai
goduta, e goda tuttavia perfetta salute. Nel Tom. 13.
del Giornale di Modena avrà letto quella mia Lettera
a Lei diretta, in cui spiego l'artifizio, del quale la Na-
tura si serve per accomodare una corda ad una
curva isocrona bilanciata. Il Tom. 14., che sta per
uscire, ne conterrà un'altra, in cui determino l'equa-
zione generalissima della curva isocrona bilanciata.
Le sarà forse capitata sotto degli occhi l'Operetta
del Sig.r Ab. Dassuti Fiorentino abitante in Roma,
che è l'Autore dell'Estratto della Istituzioni Analiti-
che di mio Fratello inserito nel predetto Giornale.
Avendo in detto Estratto a molte lodi aggiunte delle
censure, l'Ab. Vincenzo gli inviò una Lettera, in
cui si difendeva dalle mentovate censure, alla
quale non avendo mai risposto il Sig.r Dassuti,
io l'ho fatta stampare nella Raccolta di Opuscoli
del P. Mandelli. Colla predetta Operetta adun-
que risponde il Sig.r Ab. Dassuti alla Lettera di
mio Fratello con maniera a dir vero poco obbli-
gante. Io ho disteso la risposta a questo Libretto,
che si leggerà nel Tomo 15., e comparirà anonima,
perchè io non voglio espormi ai modi pungenti,
e mal convenienti del Sig.r Ab. Dassuti. Se ella
mi onorerà di esaminarla, e mi comunicherà
il suo giudizio, l'avrò per favor singolare.

Mi

V.ro D.mo aff.mo Fratello
Francesco Riccati

Mi scrisse tempo fa, che sperava di far imprimere in Modena il terzo Tomo degli Opuscoli del mio Fratello colla assistenza di uno de' primi Matematici di Italia che suppongo sia il Sig.r Avvocato Cassiani. Ora queste speranze sussistono, o sono svanite? Se sono svanite, bisognerà rivolgersi altrove per ottenere l'intento, che il nominato terzo Tomo si stampi.

Il Sig.r Colonnello Lorgna mi ha spedito in dono l'ultima sua Opera sopra l'equazioni del terzo grado, che contiene delle ottime riflessioni. In egli vedeva, che svolta in una serie convergente la formola del caso irreducibile, né egli, né il Sig.r de la Grange, né il Sig.r de Malfatti hanno potuto trovare la somma della predetta serie senza che in essa si insinuino gl'immaginarj.

Mi continui la sua pregiatissima grazia, amicizia, e corrispondenza, ed esibendomi ai suoi comandi mi glorio di protestarmi

Di Lei Sig.r Co. Padrone Riverito

Treviso 30 Luglio 1776

Nob. Sig.r Co. Girolamo Fenaroli. Brescia.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

V.a Dev.e Aff.e Servo
Franco Riccati

n.o 4.

[illegible]
[illegible]

Car. Fratello 215

mi sono scordato sul Padiglione nella
mia Camera d'Insetto col disegno e sa=
pone Colloredo. Menin sa quale è
mandatemelo tosto con qualche occasione
Io adesso sto bene. Tutti vi salutano, e
sono

Udine 6 Agosto 1728

Vostro aff.^mo Fratello
Franco Riccati

204

218

Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Col.mo 

Al Mto. Ill.e Co: Giovanno Ric=
cati Sig.e Sig.e P.ne Col.mo

Treviso

Ill:^mo^ Sig:^re^ Sig:^re^ Pro.ne Colmo 

Dal Sig.^r^ Leopoldo M.^a^ Caldani mi è stato spedito il bel Saggio Analitico di V. S. Ill:^ma^ sopra la riduzione degli archi circolari ai logaritmi immaginarj. Si contengono in esso delle ottime riflessioni, fra le quali si distinguono quelle, in cui nota le circostanze, che richiedono il proionumero affermativo o negativo, reale o immaginario, e la suttangente reale o immaginaria nei diversi rami della stessa logistica. Leggendolo con sommo piacere, e attenzione, ho segnati alcuni punti, nei quali potrebbe incontrare non disprezzevole opposizione per parte del Sig.^r^ Ab. Passuti, ed io a qualunque suo cenno sarò pronto a comunicarle le avvertenze, che ho fatte. Intanto le porgo i dovuti ringraziamenti per la difesa, che si è degnata di intraprendere dell'Ab. Vincenzo mio fratello trattato con poca urbanità dal Sig. Ab. Passuti, e desideroso delli onore de' suoi comandi, con piena stima e rispetto mi sottoscrivo.

Di V. S. Ill:^ma^

Treviso 14 Agosto 1774.

Ill:^mo^ Sig.^r^ Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot.^mo^ Obbl.^mo^ Servitore
Giordano Riccati

Non ~~[illegible]~~ ovvero 0.1 : 0√-1 :: a.1 : a√-1. Il nulla moltiplicato per due quantità finite rende sempre i due prodotti eguali a nulla, e perciò 0.1 = 0√-1. ~~[illegible]~~ Non ne risulta l'eguaglianza

Palli

ovvero $0 \cdot 1 : 0\sqrt{-1} :: a \cdot 1 : a\sqrt{-1}$. Il nulla moltiplicato per una quantità finita rende sempre i due prodotti eguali a nulla, e perciò $0 \cdot 1 = 0\sqrt{-1}$ ; ~~[illegible]~~ Non ne risulta l'eguaglianza

Pallo

[illegible]

Riflessioni intorno ai numeri, ed ai logaritmi reali, o immaginarj.

Giudico sommamente necessario l'esaminare, se la formola l. a + √-1 dy = di

Ill.mo Sig.r Sig.r Padrone Col.mo 219

Ho ricevuto la sua Lettera sopra le Riflessioni Analitiche del Sig.r Ab. Rossetti, ed altresì il Saggio Analitico del Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli, e per l'una, e per l'altra le professo le più distinte obbligazioni. Ella si è dimostrato grato alla memoria di mio fratello assumendone la difesa, nè io cesserò mai di porgerle i più divoti ringraziamenti. È bella la dimostrazione, che dà alla pag. 13., che $l.-1 = 0$. Sarebbe convinto il Bernoulli di paralogismo, se il nulla fosse il solo valore di $l.-1$; ma ricavandone infiniti, e fra questi $p\sqrt{-1}$, sarà $l.-1 : \sqrt{-1} :: p\sqrt{-1} : \sqrt{-1} :: p : 1 :: 2p : 2$, cioè quanto a dire $l.-1 : \sqrt{-1}$ come la circonferenza al diametro qualmente ha stabilito il Bernoulli.

Ella dice ottimamente, che se la formola $e^y = x$ non dà che il solo ramo dei numeri positivi, questo prova la ristrettezza della formola, e non la mancanza del ramo dei numeri negativi.

Non può ammettersi che sia $0 : 0\sqrt{-1} :: a : a\sqrt{-1}$ ovvero $0.1 : 0\sqrt{-1} :: a.1 : a\sqrt{-1}$. Il nulla moltiplicato per due quantità finite rende sempre i due prodotti eguali a nulla, e perciò $0.1 = 0\sqrt{-1}$ ~~[illegible]~~. Non ne risulta l'eguaglianza

dalli

eguaglianza dei prodotti moltiplicando le predette due quantità per la grandezza a. Per la qual cosa essendo $o \cdot 1 = o\sqrt{-1}$, ma non già $a \cdot 1 = a\sqrt{-1}$, non può sussistere la premessa analogia. Secondo Lei si dovrebbe avverare la proporzione $o \cdot 1 : o \cdot 2 :: a \cdot 1 :$ [illegible], la qual certamente è falsa; imperciocchè anche Ella accorderà essere $o \cdot 1 = o \cdot 2$, ed $a \cdot 1$ la metà di $a \cdot 2$. Asserendosi da Lei dubitativamente non essere $a = o\sqrt{-1} = a$, $a = o\sqrt{-1}$ avrà più campo da potersi difendere dalle opposizioni del Sig.r Ab. Dussuti, il quale certamente non taceva [illegible]

Ho letto con tutta l'attenzione, e riconoscenza il Saggio del Sig.r Ab. Calandrelli, a cui ho scritto una lettera di ringraziamento. Li ho avvisato aver io notati alcuni passi, che potrebbero incontrare delle valide opposizioni. Se mi comanderà di comunicargli la mia avvertenza, lo farò volontieri. Resto pieno di debito, e di vera stima

[illegible]

Treviso 17 Agosto 1778 — Di V. S. Ill.ma

Ill.mo Sig. Padrone Mo. Caetani — Divot.mo Obbl.mo Servitore

Roma — Giordano Riccati

# Riflessioni intorno ai numeri, ed ai logaritmi reali, e immaginarj.

Giudico sommamente necessario l'esaminare, se la formola [illegible]

\# see opp
page

# Riflessioni intorno ai numeri, ed ai logaritmi reali, o immaginarj.

Giudico sommamente necessario l'esaminare, se la formola I. $a \cdot \frac{\pm dy}{\pm y} = dx$ possa ricevere quelle modificazioni, che ne lasciano intatto il valore, tra le quali certamente hanno luogo le seguenti. II. $a \cdot \frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx$, III. $a\sqrt{-1} \cdot \frac{\pm dy}{\pm y} = dx\sqrt{-1}$, IV. $a\sqrt{-1} \cdot \frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx\sqrt{-1}$.

Quando dal celebre Sig.r Eulero la formola
$z^q - a^q = \overline{z-a} \cdot \overline{z^2 - 2 Cc. \frac{2\xi}{q} . z + a^2} \cdot \overline{z^2 - 2 Cc \frac{4\xi}{q} . z + a^2}$ &c.
nella quale $q$ dinota un numero infinito, e il protonumero, e la suttangente della logistica, $2\xi$ la circonferenza circolare del raggio $a$, e si ha inoltre $z = a + \frac{x}{q}$. Se $\varphi$ significhi qualunque numero intero espresso dalla serie 1, 2, 3, 4 &c., sarà $z^q - a^q = \overline{z-a} \cdot \overline{z^2 - 2 Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} . z + a^2}$. Il trinomio si risolve in due binomj immaginarj, cioè $z^2 - 2 Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} . z + a^2 = \overline{z - Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} + \sqrt{-1}\, Sc. \frac{2\varphi\xi}{q}} \cdot \overline{z - Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} - \sqrt{-1}\, Sc. \frac{2\varphi\xi}{q}}$, i quali col mezzo del segno ambiguo si riducono ad uno, onde si abbia
$z^q - a^q = \overline{z-a} \cdot \overline{z - Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} \pm \sqrt{-1}\, Sc. \frac{2\varphi\xi}{q}}$.
Si avranno pertanto tutti i valori della $z$, se ciascun de' fattori si ponga $= 0$.

Sia il primo fattore $z - a = 0$; ma secondo il lodato Autore $z = a + \frac{x}{q}$; dunque $a + \frac{x}{q} - a = 0$, o sia $x = 0$, e conseguentemente $l \pm a = x = 0$.

Passiamo al secondo fattore
$z - Cc. \frac{2\varphi\xi}{q} \pm \sqrt{-1}\, Sc. \frac{2\varphi\xi}{q} = 0$. Il seno

dalli

dell'arco infinitesimo $\frac{2\varphi\varepsilon}{q}$ si agguaglia all'arco stesso, ed il suo coseno al raggio $= a$. Il perchè sostituito in cambio di $z$ il suo valore $a + \frac{x}{q}$, troveremo $a + \frac{x}{q} - a \pm \sqrt{-1} . \frac{2\varphi\varepsilon}{q} = 0$, o sia $x = \pm\sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$: ma $x$ è il logaritmo di $\pm z = \pm a$; dunque $l \pm a = \pm\sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$; e messo a computo anche il primo fattore,
$l \pm a = 0, \pm\sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon, = \pm\sqrt{-1} . 2\varepsilon$, $\pm\sqrt{-1} . 4\varepsilon$, $\pm\sqrt{-1} . 6\varepsilon$ &c.

Ora $l \pm y = x + l \pm a$; dunque $l \pm y = x \pm \sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$. Se $\pm y$ è quantità reale, le dee competere un logaritmo reale $x$, ed infiniti immaginarj $x \pm \sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$. E poichè $D . x \pm \sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon = dx$ flussione reale, si raccoglie che l'equazione della logistica avrà la consueta sua forma $l . a . \frac{\pm dy}{\pm y} = dx$, qualunque $l \pm y$ sia quantità immaginaria; perchè sendo costante la grandezza immaginaria $\pm\sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$, è reale la flussione $dx = D . x \pm \sqrt{-1} . 2\varphi\varepsilon$.

Se il numero si supponga immaginario ed $= y\sqrt{-1}$, può ad esso corrispondere un logaritmo reale. Nella logistica il logaritmo reale $= a$ compete ai numeri reali $\pm a$, che sogliono chiamarsi basi. Ha dimostrato l'Ab. Vincenzo mio fratello, che la base si appropria oltre i due valori reali $\pm a$ anche infiniti immaginarj $\pm a\sqrt{-1}$, $\pm a\sqrt[4]{-1}$, $\pm a\sqrt[4]{-1}$ &c ai quali tutti spetta lo stesso logaritmo $= a$; e quindi ad un numero immaginario può riferirsi un logaritmo reale,

ed

ed anche innumerabili immaginarj dalla forma $x \pm \sqrt{-1}.a\varphi\epsilon$. Per la qual cosa in tal circostanza servirà l'equazione II. $a.\frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx$, in cui senza dubbio è reale la sottotangente ~~a. costante logaritmica del Sig.r Prof. Nicolai~~.

Prendiamo in considerazione, se sia possibile l'equazione III. $a\sqrt{-1}.\frac{\pm dy}{\pm y} = dx\sqrt{-1}$, in cui i numeri sian reali, ed immaginarj i logaritmi variabili. Abbiamo veduto essere $l\pm y = x \pm \sqrt{-1}.a\varphi\epsilon$. Nell'omogeneo di comparazione $x$ è la sola quantità fluente, e quindi $dx$ è sempre flussione reale, e per conseguenza costantemente si avverà la formola I. $a.\frac{\pm dy}{\pm y} = dx$. Il logaritmo immaginario $x\sqrt{-1}$ richiederebbe la suttangente immaginaria $a\sqrt{-1}$. La sottotangente reale $= a$ è l'unica costante, che ha luogo nella equazione $a\frac{\pm dy}{\pm y} = dx$, ed in questa non si può mettere mano senza che si cangi la curva.

Resta da fare qualche avvertenza sopra la la formola IV. $a\sqrt{-1}.\frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx\sqrt{-1}$ Ad un numero immaginario $y\sqrt{-1}$ corrisponde il pretenumero immaginario $a\sqrt{-1}$. Proprietà della logistica si è, che due coppie di numeri, che si riferiscono in data ragione, rinchiudano il medesimo logaritmo, e tali sono $a, y$; $a\sqrt{-1}, y\sqrt{-1}$: ma ad $y$ compete il logaritmo $x \pm \sqrt{-1}.a\varphi\epsilon$; dunque lo stesso logaritmo spetterà parimente ad $y\sqrt{-1}$, e non

e non già $x\sqrt{-1} \pm 2q\varepsilon\sqrt{-1}$. Quindi la formula IV. alla nostra logaritmica non si adatta, che esige invariabile la suttangente.

Credè il Sig. Arcip. Nicolai, di sostenere, che posti immaginarj i numeri, e reali i logaritmi, debba essere immaginaria la suttangente, asserendo che in tutti i casi di $y$ immaginario l'espressione $\frac{dy}{y}$ non è reale; perchè ogni numero immaginario non nasce dal moltiplicare per $\sqrt{-1}$ una grandezza reale: e qui egli è d'uopo riflettere, che quantunque la sua proposizione sia vera, nulladimeno si danno dei numeri immaginarj $y\sqrt{-1}$, rispettivamente ai quali il logaritmo reale si richiede altresì reale la suttangente come evidentemente raccogliesi dall'equazione II. $a.\frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx$.

Vediamo cosa succederebbe nella ipotesi che fosse $y = r + t\sqrt{-1}$. Nel circolo, che ha il raggio $= a$, si determini l'arco $u$, in cui il seno al coseno stia come $t : r$. Egli è chiaro, che facendo $\sqrt{r^2+t^2} = s$, sarà $t = \frac{s\,Sc.u}{a}$, $r = \frac{s\,Cc.u}{a}$; dunque $l\,\overline{r+t\sqrt{-1}}$ $= l\,\frac{s}{a}.\overline{Cc.u+\sqrt{-1}.Sc.u} = ls - la + l\,\overline{Cc.u+\sqrt{-1}Sc.u}$. Basterà dunque trovare il logaritmo di $Cc.u+\sqrt{-1}.Sc.u$. Per ciò ottenere, si avverta essersi provato dal Co. Vincenzo mio fratello nel Cap. 7. Lib. primo Tom. 2 delle Istituzioni, che $Cc.u+\sqrt{-1}.Sc.u = a.\overline{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}}^{\,q}$ posto $q$ infinito. Nella equazione del Sig.r Eulero $\overline{a+\frac{x}{q}}^{\,q} - a^{q-1}y = 0$ pongo in luogo

luogo di $y = Cc.u + \sqrt{-1}\,Sc.u$ il suo valore $a.\overline{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}}^{\,q}$, e scopro $\overline{a+\frac{x}{q}}^{\,q} - a^q.\overline{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}}^{\,q} = 0$ ovvero $\left(\frac{a+\frac{x}{q}}{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}}\right)^q - a^q = 0$: faccio $\left(\frac{a+\frac{x}{q}}{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}}\right)^q = z^q$, onde ne risulta $z^q - a^q = 0$. Avremo dunque per la cosa detta

$z^q - a^q = \overline{z-a}\,.\,\overline{z - Cc.\frac{2\varphi\varepsilon}{q} \pm \sqrt{-1}\,Sc.\frac{2\varphi\varepsilon}{q}}$.

Ora sendo $q$ infinito $Cc.\frac{2\varphi\varepsilon}{q} = a$, $Sc.\frac{2\varphi\varepsilon}{q} = \frac{2\varphi\varepsilon}{q}$, e per conseguenza

$z^q - a^q = \overline{z-a}\,.\,\overline{z-a \pm \sqrt{-1}.\frac{2\varphi\varepsilon}{q}}$. Il primo fattore ci dà $z-a=0$, e sostituito in vece di $z$ il suo valore, $\frac{a+\frac{x}{q}}{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}} - a = 0$, formola da cui si raccoglie $x = u\sqrt{-1}$. Il secondo fattore determina

$\frac{a+\frac{x}{q}}{1+\frac{u\sqrt{-1}}{qa}} - a \pm \sqrt{-1}.\frac{2\varphi\varepsilon}{q} = 0$, ed il computo ci insegna essere $x = \sqrt{-1}.\overline{u \mp 2\varphi\varepsilon}$

Conchiudasi pertanto essere

$l\overline{v+t\sqrt{-1}} = l\sqrt{v^2+t^2} - la + \sqrt{-1}.\overline{u \mp 2\varphi\varepsilon}$, e giacchè $la = 0$,

$l\overline{v+t\sqrt{-1}} = l\sqrt{v^2+t^2} + \sqrt{-1}.\overline{u \mp 2\varphi\varepsilon}$. Da questa formola si raccolga, che al numero $y = v+t\sqrt{-1}$ misto di reale, e di immaginario si riferisce il logaritmo $x = l\sqrt{v^2+t^2} + \sqrt{-1}.\overline{u \mp 2\varphi\varepsilon}$ misto ancor esso di reale, e di immaginario. Inoltre presa le differenze troveremo $\frac{a\,dy}{y} = a.\frac{dv+dt\sqrt{-1}}{v+t\sqrt{-1}} = dx = a.\frac{v\,dv+t\,dt}{v^2+t^2} + \sqrt{-1}.du$, e ne inferiremo, che sendo immaginarj $\frac{dy}{y}$, e $dx$, la suttangente $a$ si conserva reale, e

mantiene

mantiene il consueto valore.

Posto che sia $v : t$ in ragione costante, riuscirà altresì costante la misura dell'arco $u$, dimodochè $du = 0$. Stabiliscasi $t = mv$, ed effettuate le sostituzioni, ci si presenterà $\frac{a\,dy}{y} = a \cdot \frac{dv + m\,dv\sqrt{-1}}{v + mv\sqrt{-1}} = dx$ $= a\frac{v\,dv + m^2 v\,dv}{v^2 + m^2 v^2}$, o sia ridotto il computo $\frac{a\,dy}{y} = \frac{a\,dv}{v} = dx = \frac{a\,dv}{v}$. Si rifletta, che divenendo reale nella presente ipotesi la flussione $\frac{dy}{y}$, si prova tale anche la flussione $dx$, onde intatta si conservi la sottotangente $a$.

Raccogliendo le conseguenze da quanto finora ho osservato, torno ad affermare, richiedersi dalla natura della logistica, che nella stessa curva la suttangente $a$ rimanga sempre invariata. La proprietà essenziale, che sia costante la suttangente $a = \frac{y\,dx}{dy}$ determina l'equazione della nostra curva, nella quale $a$ è la sola costante, che ha luogo. Le costanti dirò così essenziali di qualunque curva restano sempre intatte. Nel circolo $a^2 - x^2 = y^2$ diventeranno bene immaginarie o la $y$, quando sia $x > a$, o la $x$, quando sia $y > a$, ma non mai il raggio, che conserva invariabilmente la sua misura.

Nè mi si dica, che ammettendo la logistica altre costanti, cioè il protonumero, e la base, e potendo

questa

questa diveniva immaginaria, lo stesso potrà accadere ancora alla suttangente. Le due mentovate costanti non essenziali della logistica sono state scelte arbitrariamente dagli Analisti, ed essendo esse ordinate della curva, e dandosi in queste ordinate, e numeri reali, ed immaginarj; non ci deve recar maraviglia, che il proto=numero e la base oltre i valori reali ne ricavano ancora di immaginarj. La suttangente è per la natura della logistica da ritenersi costantemente l'assegnata grandezza, mediante la quale una data logistica da qualunque altra distinguesi.

Tre specie di numeri ammette la logaritmica, reali; misti di reale e d'immaginario, e semplicemente immaginarj; ~~avvertendo che ne' numeri misti tanto la quantità reale, quanto l'immaginaria hanno da esser fluenti~~. Ai numeri reali, o semplicemente immaginarj corrispondono i logaritmi reali, o misti di reale fluente, e d'immaginario costante. Se sia reale la quantità $\frac{dy}{y}$, ~~ancora~~ anche i numeri misti di reale, e di immaginario richiedono i logaritmi misti di reale fluente, e d'immaginario costante. Che se la quantità $\frac{dy}{y}$ sia immaginaria, ai numeri misti di reale e di immaginario convengono i logaritmi misti di reale e d'immaginario fluente, e d'immaginario costante.

Le due grandezze infinitesime $\frac{dy}{y}$, $dx$ hanno necessariamente da essere entrambe reali, o immaginarie, onde nell'equazione $\frac{a \pm dy}{y} = dx$ la suttangente a conservarsi l'inalterabile sua reale misura. Penso che queste mie riflessioni potranno diradare la folta nebbia che circonda la recondita materia dei numeri, e dei logaritmi reali, o immaginarj.

Annotazione.

Ho detto di sopra essere u un arco di circolo del raggio a, che pongo = alla suttangente della logistica, il cui seno al coseno stia come t : v. Ho stabilito $\sqrt{v^2+t^2} = s$, ed inoltre $t = \frac{s\,Se.u}{a}$, $v = \frac{s\,Co.u}{a}$; e quindi fatto $Se.u = p$, $Co.u = q$, si raccoglie essere $\frac{at}{s} = p$; $\frac{av}{s} = q$. Ora per la nota formola $du = \frac{a\,dp}{q}$: ma $dp = \frac{a\,dt}{s} - \frac{at\,ds}{s^2}$; dunque $du = \frac{a^2}{q}.\overline{\frac{dt}{s} - \frac{t\,ds}{s^2}}$, e ponendo in luogo di q il suo valore $du = a.\overline{\frac{dt}{v} - \frac{t\,ds}{vs}}$. E perchè $s = \sqrt{v^2+t^2}$, $ds = \frac{v\,dv + t\,dt}{\sqrt{v^2+t^2}}$, scopriremo $du = a.\overline{\frac{dt}{v} - \frac{tv\,dv - t^2dt}{v.\,\overline{v^2+t^2}}}$, e ridotto il computo, $du = a.\frac{v\,dt - t\,dv}{v^2+t^2}$.

Riassumo la formola $\frac{a\,dy}{y} = a.\frac{dv + dt\sqrt{-1}}{v + t\sqrt{-1}} = dx = a\frac{v\,dv + t\,dt}{v^2+t^2} + \sqrt{-1}.du$, e sostituito in vece di du il suo valore, mi si presenta $dx = a\frac{v\,dv + t\,dt}{v^2+t^2} + a\sqrt{-1}.\frac{v\,dt - t\,dv}{v^2+t^2}$. Data la riflessione essere $v^2+t^2 = \overline{v - t\sqrt{-1}}.\overline{v + t\sqrt{-1}}$, la nostra

formola

formola si può disporre così. $dx = a.\frac{v-t\sqrt{-1}}{v-t\sqrt{-1}} . \frac{dv+dt\sqrt{-1}}{v+t\sqrt{-1}}$, onde dividendo per $v-t\sqrt{-1}$ ne risulta $dx = a.\frac{dv+dt\sqrt{-1}}{v+t\sqrt{-1}}$, che è lo stesso valore, che abbiamo trovato competere ad $\frac{ady}{y}$. Il perchè le due flussioni $\frac{ady}{y} = dx$ saranno amendue reali; o immaginarie, secondochè sarà reale, o immaginaria la grandezza $\frac{dv+dt\sqrt{-1}}{v+t\sqrt{-1}}$.

Sia $t = mv$; $dt = mdv + vdm$, e fatta la sostituzione, avremo $\frac{ady}{y} = dx = a.\frac{dv+m\sqrt{-1}dv+vdm\sqrt{-1}}{v+m\sqrt{-1}v} = \frac{adv}{v} + \frac{adm\sqrt{-1}}{1+m\sqrt{-1}}$

Posta m costante, e perciò $dm = 0$, ne proverrà $\frac{ady}{y} = dx = \frac{adv}{v}$, come ho avvertito superiormente, e ne inferirò, che quando $t$, $v$ si corrispondono in proporzione costante, le due flussioni $\frac{ady}{y}$, $dx$ sono reali.

Che se m sia variabile, si svolga in una serie la quantità $\frac{adm\sqrt{-1}}{1+m\sqrt{-1}} = adm\sqrt{-1} + amdm - am^2dm\sqrt{-1} - am^3dm + am^4dm\sqrt{-1} + am^5dm - am^6dm\sqrt{-1} - am^7dm$ &c. $=(adm\sqrt{-1} + amdm).(1-m^2+m^4-m^6+m^8-m^{10}$ &c.$)$, e surrogato questo valore nell'equazione $\frac{ady}{y} = dx = \frac{adv}{v} + \frac{adm\sqrt{-1}}{1+m\sqrt{-1}}$, scopriremo $\frac{ady}{y} = dx = \frac{adv}{v} + (adm\sqrt{-1} + amdx).(1-m^2+m^4-m^6+m^8-m^{10}$ &c.$)$, formola che dimostra patentemente essere in tal caso tutte e due immaginarie le flussioni $\frac{ady}{y}$, $dx$, e che l'immaginario dipende non dalla suttangente, e dalla logistica, che dee mantenersi sempre

costante

costante, e reale, ma soltanto dalla quan-
tità $\frac{dv + dt\sqrt{-1}}{v + t\sqrt{-1}}$, che è sempre immaginaria,
qualora t, ed v si riferiscono in propor-
zione variabile.

Aggiungo un'altra avvertenza, che è importantissima. Abbiamo di sopra deter-
minato $x = l\sqrt{v^2+t^2} - la + \sqrt{-1}\cdot\overline{u \mp 2q\varepsilon}$.
In riguardo al protonumero deve poter essere $x_1 = 0$, il che necessariamente esige, che nell'omogeneo di compara-
zione si annullino tanto le quantità reali, quanto le immaginarie. Avremo $\sqrt{-1}\cdot\overline{u \mp 2q\varepsilon} = 0$, quando sia $u = \pm 2q\varepsilon$, e per conseguenza $Se.u = 0$: ma $Se.u = \frac{at}{\sqrt{v^2+t^2}}$; dunque $t = 0$. Dovendo inoltre essere $l\sqrt{v^2+t^2} - la = 0$, e perciò $\sqrt{v^2+t^2} = a$; fatto $t = 0$, si troverà $v = a$. Per la qual cosa quantunque generalmente i numeri siano misti di reale, e di immaginario, ed abbiano il valore $v + t\sqrt{-1}$, nulladimeno il protonumero sarà reale, ed $= a$. Di più infiniti numeri diverranno reali, quando l'arco u crescerà sopra $\pm 2q\varepsilon$ per $n\varepsilon$, potendo esser n qualunque numero della serie 1, 2, 3, 4 &c., nel qual caso sarà $t = 0$, $y = v$, $x = lv + \sqrt{-1}\cdot n\varepsilon$, e non solo si troverà reale il numero v, ma ancora il logaritmo flu-
ente. Nei detti siti non pertanto saranno miste di reale, e di immaginario le flus-
sioni $dy = dv + dt\sqrt{-1}$, $dx = a\cdot\frac{dv + dt\sqrt{-1}}{v}$.

Abbiamo veduto, che se i numeri sono semplicemente immaginarj, per esempio

$y\sqrt{-1}$

$y\sqrt{-1}$, è tale altresì il protonumero, che si eguaglia ad $a\sqrt{-1}$. Non così succede qualora i numeri misti di reale, e di immaginario hanno la forma $r+t\sqrt{-1}$, trovandosi in tal circostanza reale il protonumero, come ho testè dimostrato.

Ora passo a cercare cosa addivenga, quando il numero misto di reale, e di immaginario si agguaglia ad $r+t\sqrt[4]{-1}=y$. Ho in altra occasione provato $\sqrt[4]{-1} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}$, e perciò sarà $r+t\sqrt[4]{-1} = r + \frac{t+t\sqrt{2}+t\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \frac{\overline{r+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}}+\overline{t-r}\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = y$, e quindi $y\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \overline{r+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}}+\overline{t-r}\sqrt{-1}$. Pongo $y\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = Ly$, $\overline{r+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}} = R$, $t-r = T$, ed ho $Ly = R+T\sqrt{-1}$, ch'è il caso da me trattato nelle presenti Riflessioni. Avremo dunque secondo a quanto ho dimostrato $\ell Ly = \ell\overline{R+T\sqrt{-1}} = \ell\sqrt{R^2+T^2} - \ell a + \sqrt{-1}\cdot\overline{u\mp 2q\varepsilon}$. Significa $u$ un arco di circolo descritto col raggio $=a$ suttangente della logistica, e protonumero, in cui il seno $=\frac{aT}{\sqrt{R^2+T^2}}$ al coseno $=\frac{aR}{\sqrt{R^2+T^2}}$ stia come $T:R$. Nella premessa formola, che può prendere il seguente aspetto $\ell Ly = \ell\sqrt{R+T\sqrt{-1}}\sqrt{R-T\sqrt{-1}}$ ~~sostituito~~ $-\ell a+\sqrt{-1}\cdot\overline{u\mp 2q\varepsilon}$, sostituiti in cambio di $Ly$, $R$, $T$ i loro valori troveremo $\ell y\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \ell\sqrt{\overline{r+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}}+\overline{t-r}\sqrt{-1}}\sqrt{\overline{r+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}}-\overline{t+r}\sqrt{-1}} - \ell a + \sqrt{-1}\,u + \sqrt{-1}\cdot\mp 2q\varepsilon$.

Ho sopra dimostrato $du = a\cdot\frac{RdT-TdR}{R^2+T^2}$. Questa formola può prendere la forma

$du\sqrt{-1}$

$\partial u\sqrt{-1} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\partial R + \partial T\sqrt{-1}}{R + T\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}a \cdot \frac{\partial R - \partial T\sqrt{-1}}{R - T\sqrt{-1}}$, onde si abbia integrando nella logistica dalla suttangente $= a$

$u\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l\,\overline{R + T\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} l\,\overline{R - T\sqrt{-1}}$, e sostituendo in vece di $R$, e di $T$ i loro valori $u\sqrt{-1} = \frac{1}{2} l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} - \overline{t+v}\sqrt{-1}}$. Averemo pertanto

$ly\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = l\sqrt{\overline{v+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\overline{v+t}\cdot\overline{1+\sqrt{2}} - \overline{t+v}\sqrt{-1}} - la + \frac{1}{2} l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} - \overline{t+v}\sqrt{-1}}\sqrt{-1} + \sqrt{-1}\cdot \mp 2q\epsilon$, e ridotto che sia il computo $ly = - la\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} + l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}\cdot\mp 2q\epsilon = x$; il che &c.

Rispettivamente al protonumero $ly = x$ ha da poter essere $= 0$. Suppongasi $q = 0$, che è uno dei valori, che gli competono, e ne proverrà

$-la\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} + l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1}} = 0$, e quindi $a\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1} = v\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} + t\cdot\overline{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}$, o sia $a - v = t\cdot\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}$: ma $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{-1}$; dunque $a - v = t\sqrt[4]{-1}$. E poichè $y = v + t\sqrt[4]{-1}$, scopriremo il protonumero $y = v + a - v = a$, come altresì accade nel caso, che sia $y = v + t\sqrt{-1}$. Più generalmente avrei potuto fare $ly = \sqrt{-1}\cdot\mp 2q\epsilon$, e similmente si sarebbe trovato il protonumero $y = v + t\sqrt[4]{-1} = a$. Avverto, che in questo incontro la quantità $t = \frac{a-v}{\sqrt[4]{-1}}$ diviene immaginaria.

Ma ritornando alla formola generale $ly = x$, ed essendo $\frac{a\,dy}{y} = \partial x = \partial\, l\,\overline{v+t\cdot\overline{1+\sqrt{2}} + \overline{t-v}\sqrt{-1}}$, apertamente

si scopre, che la suttangente $a$ si mantiene reale.

Se fosse $v : t$ in ragione costante di $1 : m$, onde ne risultasse $t = mv$, si avrebbe la formola $l\,\overline{v+mv\sqrt{-1}} = l\,v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} = x$, e presa la differenza $a\frac{dv}{v} = dx$. Da quest'ultima espressione impariamo, che trovandosi reale tanto $\frac{dv}{v}$, quanto $dx$, la stessa prerogativa compete anche alla suttangente $a$.

Abbiamo scoperto generalmente il protonumero $v+t\sqrt{-1} = a$. Fatto $t = mv$, si determinerà il protonumero $v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} = a$. Il perchè $v = \frac{a}{1+m\sqrt{-1}}$ in tale circostanza diventerà quantità immaginaria.

Potrebbe ~~non facilmente~~ a qualcuno cadere in pensiero, che nella presente ipotesi dovesse essere il protonumero $= \frac{a}{h}\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}}$; imperciocchè si avrebbe $D\,v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} = dv\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}}$; $D\,l\,v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} =$ ~~[illegible]~~ $a\frac{dv}{v}$ e quindi l'analogia
$dv\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}}$ : ~~[illegible]~~ $a\frac{dv}{v} :: v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} : a$, ~~[illegible]~~, che non varierebbe il valore della suttangente facendo ~~[illegible]~~ $v\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}} = \frac{a\cdot\overline{1+m\sqrt{-1}}}{h}$. ~~[illegible]~~ si lascia intatta. Ora egli è da vedere, se posti i due

protonumeri

protonumeri reali ± a, la quantità $a\cdot\frac{1+m\sqrt[4]{-1}}{h}$ possa essere protonumero. Tutti i protonumeri relativi ai due ± a nascono dal prendere fra ± a una, o più medie continue proporzionali. Da ciò ne deriva, che se $a\cdot\frac{1+m\sqrt[4]{-1}}{h}$ è protonumero, il coefficiente $\frac{1+m\sqrt[4]{-1}}{h}$ alzato ad una determinata potestà ha da divenire = 1. Per abbreviare il calcolo, faccio m = 1. Sostituito in cambio di $\sqrt[4]{-1}$ il suo valore, avremo

$\frac{1+m\sqrt[4]{-1}}{h} = \frac{2+2\sqrt{2}}{h\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}}$. Supponiamo ~~Avremo~~ pertanto

$$\overline{\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h^2}}^{\,2} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{h^2\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}^{\,2}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{h^2\cdot\overline{1-\sqrt{-1}}\cdot\overline{2+2\sqrt{2}}}$$

$$\overline{\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h^4}}^{\,4} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,4}}{h^4\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}^{\,4}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{h^4\cdot -2\sqrt{-1}},$$

$$\overline{\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h^8}}^{\,8} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,8}}{h^8\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}^{\,8}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,4}}{h^8\cdot -4\ldots}$$

$$\overline{\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h^{16}}}^{\,16} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,16}}{h^{16}\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}^{\,16}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,8}}{h^{16}\cdot 16}.$$

Alzando dunque il coefficiente $\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h}$ alla decimasesta potestà siamo pervenuti alla grandezza $\frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,8}}{h^{16}\cdot 16}$, che si agguaglierà all'unità, quando sia $h = \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{\sqrt[16]{16}}$. Il perchè sembra che

$$a\cdot\frac{1+\sqrt[4]{-1}}{h} = a\cdot\frac{2+2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{\sqrt[16]{16}}\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}}$$

possa essere protonumero ~~relativo ad una~~ diverso da a. Si ingannerebbe frattanto chi pensasse così. Ricercandone i vestigi dal calcolo fatto si trova

~~[illegible]~~ $h^{16}$

$$h^{16} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,8}}{16}$$

$$h^{8} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,4}}{-4}$$

$$h^{4} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{-2\sqrt{-1}}$$

$$h^{2} = \frac{2+2\sqrt{2}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{\overline{1-\sqrt{-1}}\cdot\overline{2+2\sqrt{2}}} = \frac{\overline{2+2\sqrt{2}}^{\,2}}{\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}^{\,2}}$$

$$h = \frac{2+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}$$ , e quindi

$$a\cdot\frac{\overline{1+\sqrt[4]{-1}}}{h} = \frac{a\cdot\overline{2+2\sqrt{2}}}{h\cdot\overline{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}} = a\,.$$ Il pro-
tonnumero dunque $a\cdot\frac{\overline{1+\sqrt[4]{-1}}}{h}$ non è di-
verso dal protonnumero $= a$ dimostra-
tivamente da me stabilito.

2. 3 67

Sig.re Co: Stimatissimo. 249 265

Brescia Adì 20 Ag.to 78

La sua Lettera mi ha ritrovato absente onde questa mia riuscirà un poco tarda a comparire.

233

Lettera
al
Sig. Arciprete
Giambatista Nicolai Prof.
di Analisi nell' Univ.tà
di Padova.

234

Sig.^re Co: Stimatiss.^mo 249 265

Brescia Adì 20 Ag.^to 748

La sua Lettera mi ha ritrovato absente onde que-
sta mia riuscirà un poco tarda a comparire.

Sig.^r Arciprete Riverit.^mo 239

Lessi con sommo piacere la sua bella, e profonda prima Dissertazione sopra i logaritmi dei numeri reali positivi, e negativi. Ella ha posto in chiaro la vera natura della logistica nascente da una serie continua geometrica di numeri, che crescono o calano per menomissime quantità, e che sempre distano l'uno dall'altro contiguo per una flussione costante. Chiamato $a$ il primo numero, scelto ad arbitrio, un altro numero $na$, cui si dia nome di base, sia lontano da $a$ per l'intervallo $f$, che sarà il logaritmo di $na$. Si divida $f$ per $q$ numero pari trascendentemente infinito, e sia $\frac{f}{q} = dR$ la distanza fra il primo numero $a$, ed il secondo $z$; fra il secondo ed il terzo &c. e si supponga $z = a + adw$. Il terzo numero sarà $\frac{z^2}{a}$, il cui logaritmo $2dR$; il quarto numero $\frac{z^3}{aa}$, il cui logaritmo $3dR$ &c. e finalmente il numero, il cui logaritmo $qdR = f$, si eguaglierà a $\frac{z^q}{a^{q-1}} = na$. Avremo dunque l'equazione $z^q = na \cdot a^{q-1} = n \cdot a^q$, la quale conservandosi la stessa, sendo positivi, o negativi $a$, $z$, $na$, ci mostra a dito, che allo stesso logaritmo $0$, $dR$, $f$ due numeri reali uguali $\pm a$, $\pm z$, $\pm na$ ci corrispondono; e che potendo assegnarsi ad $n$ qualsivoglia valore dal nullo sino all'infinito, non si dà logaritmo $f$, a cui non si riferiscano due numeri uguali

$\pm na$

Ima una positivo; e l'altro negativo. La nostra curva adunque è formata da due rami eguali che servono ai numeri positivi, e negativi corrispondenti ai medesimi logaritmi.

Proprietà di una serie geometrica continua si è, che due termini infinitamente vicini differiscano per una quantità proporzionale al termine antecedente. Il perchè se il numero prossimo ad a cresca per $a\,dw$, il numero prossimo ad $na$ crescerà per $na\,dw$. Si trova la sottotangente $c$ della logistica relativa all'ordinata $a$ col mezzo della analogia $a\,dw : dx :: a : c = \frac{dx}{dw}$. Non altrimenti la suttangente relativa all'ordinata qualunque $na$ si determina colla analogia $na\,dw : dx :: na : c = \frac{dx}{dw}$. Or ecco messa in chiaro la proprietà della logistica di avere la suttangente costante. La vera distinzione di una logistica dall'altra dipende dal vario valore della sottotangente, che in fatti è la costante che ha luogo nella consueta equazione $c\frac{dy}{y} = dx$.

Nel §. 54. Ella stabilisce ottimamente, che al medesimo logaritmo corrispondono infiniti numeri, due reali, e gli altri tutti immaginarj. Si dovrebbe

aggiungere

Sig.r Co: Stimatissimo. 249 265

Brescia Adì 20 Ag.to 75

[L]a sua Lettera mi ha ritrovato absente onde que-
[s]ta mia riuscirà un poco tarda a comparire.

241

aggiugnere, che allo stesso numero si riferiscono infiniti logaritmi, uno reale, e i rimanenti immaginarj.

Il § 62. ha bisogno di riforma. Non è sempre vero, che quando si maneggiano numeri immaginarj la suttangente abbia ad essere immaginaria. L'equazione I. $c. \frac{\pm dy}{\pm y} = dx$, della logistica può ricevere i seguenti aspetti II. $c. \frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx$, III. $c\sqrt{-1} . \frac{\pm dy}{\pm y} = dx\sqrt{-1}$, IV. $c\sqrt{-1} . \frac{\pm dy\sqrt{-1}}{\pm y\sqrt{-1}} = dx\sqrt{-1}$.

Il logaritmo immaginario rende necessariamente tale la suttangente*; il numero immaginario quanto a se lascia la suttangente reale.

Nel caso dei numeri immaginarj si avrebbe il protonumero $= a\sqrt{-1}$, la base $= n.a\sqrt{-1}$, a $z = a\sqrt{-1} + ad\omega\sqrt{-1}$, e supposto reale $d\lambda = \frac{f}{g}$, si determinerebbe la sottotangente $c$ coll'analogia $ad\omega\sqrt{-1} : d\lambda :: a\sqrt{-1} : c = \frac{d\lambda}{d\omega}$, che ci manifesterebbe esser essa suttangente grandezza reale.

Suppone Lei nel § 63. $d\omega$ immaginaria, il che è falso. Cresce $z$ sopra $a\sqrt{-1}$ per la differenza $d\omega . a\sqrt{-1}$, che diviene immaginaria; perchè la quantità minima reale $d\omega$ si moltiplica per $a\sqrt{-1}$.

* Questa proposizione non è generalmente vera. Intanto

242

Intanto la prego a riflettere, dedursi dalla formole III. e IV., che al numero reale $y$, o immaginario $y\sqrt{-1}$ si riferisca il logaritmo immaginario $x\sqrt{-1}$, quando è immaginaria la suttangente $= c\sqrt{-1}$.

Non rettamente si afferma nel § 72., che alterandosi il protonumero, e la base, persistendo come $f.f$, convenne che si cangi la suttangente; imperciocchè si può mutare il protonumero, e la base, e mantenersi invariata la $f.$, senza che si diversifichi la sottotangente. Ciò avverrà, se posta il protonumero $= b$, sia la base $= nb$, onde si abbia l'equazione $\overline{b+bd\omega}^2 - n.b^2 = 0$, e mettendo $b = ma$; $\overline{ma+mad\omega}^2 - n.\overline{ma}^2 = 0$, e dividendo per $m^2$, $\overline{a+ad\omega}^2 - n.a^2 = 0$. Avremo in tal caso $mad\omega : dx :: ma : \frac{dx}{d\omega} = c$, ch'è quella stessa suttangente, che si appropria la logistica, quando il protonumero $= a$, e la base $= na$.

In riguardo al § 84. rifletto, che l'equazione $z^2 - Nb^2 = 0$ si ridurrà alla $z^2 - na^2 = 0$, se il protonumero nella prima sia $b$, ed $N = n$; imperciocchè stando i protonumeri come le basi, se le intercette $z, f$ sono eguali, saranno parimente uguali le suttangenti $C, c$. Che se

non

Sig.re Co: Stimatissimo. 249 205

Brescia Adì 20 Ag.to 78

La sua lettera mi ha ritrovato absente onde que-
sta mia riuscirà un poco tarda a comparire.

243

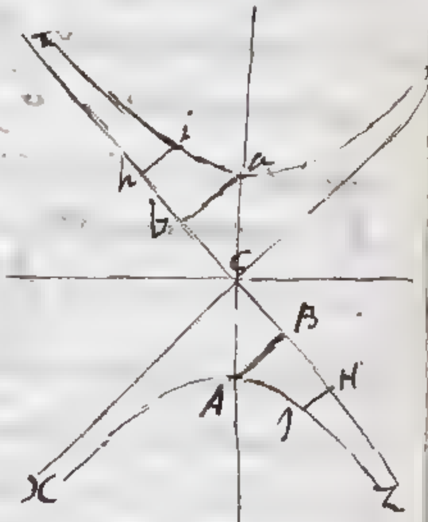
non è $7=f$, si faccia $f:g::7:\frac{7g}{f}$, e divisa il logaritmo 7 per un tal numero, ne risulterà lo stesso quoziente $\frac{f}{g}=d\pi$ nascente dal dividere f per g. Se aumentandosi costantemente la assissa per $d\pi$, cresca a per $adw$, na per $nadw$, b per $bdw$, Nb per $Nbdw$, la logistica si manterrà sempre la stessa, e la suttangente conserverà sempre il medesimo valore $c=\frac{d\pi}{dw}$. Quindi Ella rettamente deduca esser impossibile di rapportare una logistica ad un'altra di suttangente diversa, non potendo essa in nessuna situazione avere una porzione di ramo comune; perchè gli accrescimenti delle ordinate nelle due logistiche ~~sono~~ da differenti leggi vengono regolati.

Si determina nel § 45. la quadratura della logistica. Dalla solita equazione d'una tal curva agevolmente se ne deduca la quadratura $Sydx = cy - cb = can^{\frac{g+m}{h}} - can^{g} = c.CH - c.CQ$ (fig. 4.), in cui suppongo essere $CH=y=a.n^{\frac{g+m}{h}}$, $CQ=b=a.n^{\frac{g+m}{...}}$.

I Paragrafi dal 134. sino al 139. hanno bisogno di riforma, e sarà necessario, chè Ella si prenda

la

la pena di riandare i calcoli, la qual fatica per confessare il vero è stata da me risparmiata. Non può mai stare che sia $-qe \mp \frac{mf}{h} = qe \pm \frac{mf}{h}$, cioè il negativo eguale al positivo. Va bene l' idea, che il nulla nel punto C sia il vero natural primo numero, a cui corrisponda il logaritmo nulla: Al numero CB si riferisce il logaritmo XCBAX, ed al numero infinito CZ il logaritmo XCBZAX. Essendo l'equazione dell'iperbola




$\frac{1}{2}a^2 = xy$, posto $y = 0$, sarà $\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{0} = x$: ma il nulla è del pari positivo e negativo; dunque $\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{\pm 0} = x$, e perciò $\frac{1}{2}\frac{a^2}{0} = \pm x = \left\{\begin{matrix} CZ \\ Cz \end{matrix}\right.$

Ed ecco come per l'infinito si passa dal positivo al negativo. Poichè ~~Essendo~~ XCBZAX $= l\frac{1}{2}\frac{a^2}{0} = \left\{\begin{matrix} l.CZ \\ l.Cz \end{matrix}\right.$, ed inoltre XCBZAX = xCbzax, perchè anche questa seconda aja è positiva $= \int -y \cdot -dx$; sarà $l\,Cz$ = xCbzax = $l.CZ$ = XCBZAX, $l\,Ch$ = xCbhiax = $l\,CH$ = XCBHIAX, e generalmente uguali i logaritmi di numeri eguali negativo, e positivo.

Nel

Sig.r Co: Stimatissimo.

Brescia Adì 20 Ag.to 75

La sua Lettera mi ha ritrovato absente onde ques-ta mia riuscirà un poco tarda a comparire.



Nel § 164 alla pag. 135 c'è un fallo di penna, dedu=cendosi dalla formola $n^{\frac{1}{2}} = 1$ $n = 1$, e non $n = 0$. E vaglia il vero, essendo $n^{\frac{1}{2}} = 1$, avremo $n = 1^2$: ma $1^2 = 1$; dunque $n = 1$. Questa determinazione mi dà $z^2 = a^2$, e perciò $z = a$; il che mi addita quella conseguenza, ch' Ella deduce, divenir in tal caso la logistica una linea retta parallela all'asse, distante da esso quanto è il valore del protonu=mero a.

Queste sono le poche cose, che ho notate nella sua massiccia Dissertazione ripiena di bellissime dedu=zioni, che sono tutti corollarj dell'elegante suo metodo. Fra queste mi giova di specialmente nominare la determinazione dei logaritmi, dati i numeri; ed altresì dei numeri, dati i logaritmi; e la determinazione di alcune formole, parte dalle quali sono state scoperte dagli Analisti col soccorso dei calcoli più sublimi. Nel dare l'ultima mano al suo lavoro, osservi se, salva la chiarezza, si potesse rendere in alcuni passi alquanto più breve, essendomi sembrato troppo filato, e soverchiamente prolisso.

Rendervi il compimento sopra i logaritmi delle quantità immaginarie. Abbia a mente, che la sottotangente immaginaria esiga necessaria=

mente

236

246

mente i logaritmi immaginarj; e che posti questi reali, è tale ancora la sottotangente, quantunque i numeri siano immaginarj. Tenutosi fermi questi principj, si accorgerà esser giusta la proporzione fra il diametro e la circonferenza circolare stabilita dal Sig.r Giovanni Bernoulli e procedere altresì rettamente il Sig. Leonardo Eulero, quando sostiene che infiniti logaritmi immaginarj corrispondono ad ogni numero immaginario.

Spero che la pubblicazione del Trattato di cui dis tende presentemente la seconda parte, abbia da farle grande onore, il che ~~grandemente~~ sommamente desidero per quella stima e premura, che nutro per Lei, e per cui cercherò sempre di farmi conoscere

Di Lei Sig.r Arcip.te Riv.mo

Treviso 19. Agosto 1776

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Sig.re Co: Stimatissimo.

Brescia Adì 20 Ag.to 78

[L]a sua Lettera mi ha ritrovato absente onde qu[es]-
[t]a mia riuscirà un poco tarda a comparire.

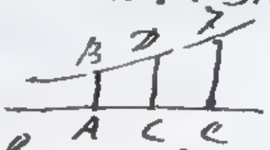
[illegible]



P. S.

[N]el rescrivere le presenti avvertenze, ho tralasciato quelle, che seguono.

Per confermare ciò, che Ella dice nel § 106, osservo che $la^2 = 2la$, quando il protonumero $= 1$. Sia $AB = 1$, $CD = a$, $EF = a^2$, e sarà




$AE = 2la = la^2$ prot.vo $1$, $CE = la^2$ prot.vo $a$, cioè a dire $la^2$ prot.vo $a = \frac{1}{2} la^2$ prot.vo $1$: ma $la^2$ prot.vo $1$. non è certamente $= 0$, quando $a$ non uguagli l'unità; dunque neppure nella stessa ipotesi $la^2$ prot.vo $a$; il che &c.

Il Paragrafo 116. ha bisogno d'essere rischiarato dove pag. 95. asserisce, essere $(-1)^{\frac{1}{q}} = 1$. Faccio $q = \frac{1}{0}$, e trovo $(-1)^{\frac{1}{q}} = (-1)^0$: ma $(-1)^0 = \frac{-1}{-1} = 1$; dunque $(-1)^{\frac{1}{q}} = 1$; il che &c.

Con semplicità si può dimostrare quello, che prova co' suoi principj nel § 121., cioè a dire essere $a^0 = \pm 1$. Imperciocchè certamente $a^0 = 1$; dunque $a^{\frac{1}{2}0} = \pm 1$: ma $\frac{1}{2} 0 = 0$; dunque $a^0 = \pm 1$; il che &c.

230

246

Sig.re Co: Stimatissimo. 249 265

Brescia Adì 20 Ag.to 78

[La] sua Lettera mi ha ritrovato assente onde que[s]ta mia riuscirà un poco tarda a comparire. [I]o non sono associato ~~associato~~ al Giornale di [M]odena ma lo sarò a momenti. M' immagino [p]erò che la sua Lettera a me diretta stampata [co]là sarà la stessa che lei m' indirizzò il me[s]e di sett.bre dell' anno scaduto. Su quella Lettera dunque se mi permette che parli ingenuamente [h]o alcune difficoltà. Che la curva sonora di [u]n sol ventre sia isoperimetra al triangolo [n]on mi sembra dimostrato. Sia A una quan[ti]tà che svolta in serie doni B+C, e sia [C] negligibile rispetto a B. Sia M, un altra [q]uantità che svolta in serie doni B+N, ed [N] sia negligibile rispetto a B. Non potrò [m]ai argomentare che M=A se eziandio [n]on sia N=C. Di fatto perchè la curva [so]nora sia isoperimetra al triangolo io devo [a]vere $\int dy \surd\left(\frac{F^2c^2}{4a^2(c^2-y^2)}+1\right) = 2\surd\frac{F^2}{4}+\frac{a^2}{2}$

mi rio le io a ro, li= o ch, op= tti lo en= zare, in= ang. lus. mo= i ma= a a

Mss. 921

Roma . . . . . .

Dev.mo ed Obblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli.

Ma se si prenda un elissi il di cui semiasse
trasverso sia $c\sqrt{b^2+4b^2}$ e il conjugato =
$\sqrt{b^2c^2+4b^2c^2-4b^2}$ ad una qualunque assisa y
presa sull' asse maggiore corrisponde l'arco
detta sommatoria $\int dy \sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{4b^2(c^2-y^2)}+1\right)}$; dunque q
arco d' elissi sarebbe isoperimetro al mag
bo. Tralascio di riflettere che questa pro
eta di isoperimetricismo non si verifiche
be eziandio che nel caso particolarissimo
$CX = \frac{b}{\sqrt{2}}$.
Secondo. Ella non da nessuna dimostra
dell' artificio che dice di avere scoperto
cioè che la parte MTB si ripieghi al
sopra e la parte MV al disotto della
rea BX, avvi io non vedo nessuna forza
atta a produrre tale effetto. La prego d
chiararmi queste due difficoltà.
Sono pressato dal sig.r Biancani custode d

daglie dell' Istituto di Bologna di procurargli
una dell' Abbate Vincenzo di Lei Fratello.
prego pertanto a suggerirmi per qual canale
posso ottenerla.

Edizione degl' opuscoli o presto o tardi si farà.
Ma per ora vuol esser difficile. Non tutte le
stamperie ponno farla.

gia lungo tempo che so essere il Sig.r
Abate Peruti picolo Geometra e gran
pretenzuto.

Mi seguiti il dono della sua amicizia, e mi
creda a lei interamente disposto.

Dev.mo Obl.mo Servitore
Girolamo Senaroli

Roma 12 (?)

Divotmo e Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

230 252

Al Nobile Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo
Il Sig.r Co: Giordano Riccati

per Venezia — Trevisi

Illustrissimo Sig. Sig. Prone Colmo 253

La gentilissima, e gratissima da me ricevuta lettera mi
presenta felice incontro a potere aprire letterario
carteggio con V.S. Ill.ma. Io meco stesso mi doleva, che
il Sig. Ab. Caldani, con prevenirmi nello spedire il mio
piccolo opuscolo, mi avesse tolta questa fortunata
occasione; ma ora all'opposto meco stesso mi rallegro,
mentre al fine, al quale opposta si era la mia negli=
genza, oggi corrisponde la sua bontà. Ho creduto
bene spedire copia del mio saggio al Sig. Ab. Boscovich,
ed insieme al Sig. d'Alembert; e presentandomisi op=
portuno mezzo, non mancherò indirizzarlo al Sig. Ab.
Frisi, ed al P. Fontana. Questo tanto più volontieri lo
faccio, vantando il Sig. Bessuti lettere di congratulamen=
to per parte de' Sig.ri d'Alembert, Frisi, e Fontana;
il suo libretto medesimo però, nel quale con tanta fran=
chezza si vanta già Professore in Pietroburgo, mi dà
forti ragioni a dubitare di sua buona fede. Le rifles=
sioni, quali si è degnata fare sopra la mia memo=
ria, non solo a me saranno gratissime, ma tanto
ancora al degnissimo P. Jacquier, al quale ho commu=
nicata la sua stimatissima. In attenzione adunque
de' suoi favori, e de' suoi pregiatissimi comandi con
pienezza di stima, ed ossequio mi dico.

Di V.S. Ill.ma

Roma 11 Agosto 1778

Devotmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli.

236 252

254

Ill.mo Sig: Sig: Prone Col.mo 255 . 61 265

236 252

10

All'Ill.mo Sig.re Sig.re Pron Col.mo

Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Venezia per Treviso

Ill.mo Sig. Sig. Pron Col.mo

È moltissimo tempo, che non ho ricevute sue lettere; lo che mi fà stare con gran pena, tanto più che mi diceva nella ultima, che stava poco bene di salute. Ora dunque gradirò di sentire dalla prima sue, che il ritardo della sua grata corrispondenza non derivi da infermità, ma bensì dalle sue applicazioni in vantaggio della Società.

Attualmente s'imprime il primo Tomo del mio corso matematico. M.r Antonio Ulloa è tornato di America con gran ricchezze proprie, ed ha condotto felicemente la Flotta a Cadice.

Mi onori dei suoi comandi, e mi creda costantemente

Di V.S. Ill.ma

Segovia 28 Agosto 1778

Aff.mo Serv.e Vero
Pietro Giannini

257
28
Stimatissimo
e sa la
massima
$\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{2}}$
= 0;
il va-
riazione
... ad
x = c.
essi ...
e le
formula
... mar
...
... di
isopa-
...

rimetta al margine ... $CN = c$, è $CX = \frac{b}{\sqrt{2}}$, e lo stesso si verifica qualunque volta sia $CN$ ... $CX$ ... $\frac{b}{\sqrt{2}}$

... alla seconda difficoltà. Obbligata la corda dalla penna a prendere la figura BXA, egli è certo che ben presto si adatta ad una curva isocrona bilanciata... l'esperienza ci insegna accomodarsi la corda ad una curva composta da moltissime semplici di vari impari. Ho supposto, che

si

257

> 4

Stimatimo
... sa la
massima:
$\sqrt{\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{2}}$
$= 0$;

a il va=
riazione
... ad
$x = c$.
... mas=
e le
formula
o mar.

ngiá
ori di.
è isopa=
posta

rgiata al triangolo ...
$CN = c$, e $CX = \frac{b}{\sqrt{2}}$, e lo stesso si verifica
qualunque volta sia $CN$ ... $GX$ ... $\frac{b}{\sqrt{2}}$
...go alla seconda difficoltà. Obbligata la corda dalla
penna a prendere la figura $B X A$, egli è certo
che ben presto si adatta ad una curva isocrona
bilanciata ... l'esperienza c'insegna accomodarsi
la corda ad una curva composta da moltissime
semplici di vari impari. Ho supposto, che

si

4

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati

Treviso

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron Col.mo — 261 — 265

Sig.r Co. Stimatissimo — 257

Treviso 4 Settembre 1778

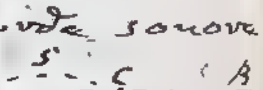
Rispondendo alla difficoltà da Lei proposta, Stimatissimo Sig.r Conte, dico esser vera verissima, che se la curva sonora d'un ventre solo sia isoperimetra al triangolo, deve valer l'equazione $n\sqrt{\frac{L^2}{4}+b^2} = \int dy \sqrt{\left(\frac{L^2c^2}{4b^2(c^2-y^2)}+1\right)}$ quando $x = L$, $y = 0$.

Io determinato nella Lettera a Lei diretta il valore di questa sommatoria nella supposizione che siano $b$, $c$, $y$ minime rispettivamente ad $L$, e la trovo $= n\sqrt{\frac{L^2}{4}+\frac{b^2}{2}} = L + \frac{b^2}{L}$ quando $x = L$.

La rettificazione dell'elissa, i cui semiassi trasverso, e coniugato $A$, $B$, le assisse $y$, e le ordinate $z$, si esprime colla seguente formula $\int dy \sqrt{\left(\frac{A^4 - \overline{A^2+B^2}\cdot y^2}{A^2\cdot \overline{A^2-y^2}}\right)}$ la quale non può mai convenire colla sovrascritta, in qualunque modo si cerchi di determinare i valori di $A$, e di $B$. La curva $BNA$ (fig. 1.) è isoperimetra al triangolo $BXA$, quando posta $CN = c$, è $CX = \frac{L}{\sqrt{2}}$, e lo stesso si verifica qualunque volta sia $CN : CX :: \ldots \frac{L}{\sqrt{2}}$.

Lungo alla seconda difficoltà. Obbligata la corda dalla penna a prendere la figura $BXA$, egli è certo che ben presto si adatta ad una curva isocrona bilanciata, e l'esperienza c'insegna accomodarsi la corda ad una curva composta da moltissime semplici di ventri impari. Ho supposto, che

si

si ripieghi nella curva isoperimetra di un solo
ventre, per mettere con più semplicità sotto
gli occhi li artificii, di cui la Natura si serve.
La corda potrebbe accomodarsi o alla curva
BNA, o alla curva BZA. Affermo pertanto
che si preferisce il primo accomodamento, per-
chè si ottiene mediante una picciolissima
azione della elasticità della corda. Essendo
l'ordinata PM comune al triangolo, ed alla
curva, ~~e si forma~~ si fa vebba una spezie di giro intorno
ai punti M, O, ed accelerandosi primieramen-
te la corda, e poscia ritardandosi, si ridurrebbe
in quiete nell'atto di adattarsi alla curva
BZMNOA isoperimetra di un ventre solo.
Non le dia fastidio, che le parti MX, MB
si muovano contrariamente, imperocchè ciò
continuamente addiviene nella corda sonora.
Sottoposto uno scannello al

punto medio C della corda AB, si renda immo-
bile esso punto premendolo con una testa di
compasso. Si inciti poscia al suono la porzione
CB, ed accaderà, che mediante la comunica-
zione del moto, le due metà CB, CA conce-
piscano movimenti contrarj, qualmente la
figura dimostra.
Ella non ci vede nella corda espressa nella fig. 1.

veruna

veruna forza atta à produrre l'effetto da me asserito. Nel primo istante del movimento il solo punto X è fornito di forza, la quale imprimè moto alla detta metà della corda, ed incurvandola fa che ciascun punto acquisti la propria forza, che lo spinge verso dell'asse AB. Ma la forza applicata alla porzione XM prevalendo a quelle, che sollecitano la porzione MB, è questa costretta a discostarsi dall'asse. Sintantoché dura la notata prevalenza, si accelerano le due parti XM, MB, che nel fine dell'accelerazione si trovano nella positura VMTB. Dopo ciò la forze del segmento BTM cominciano a prevalere a quelle del segmento MV, e ritardandosi ambo i segmenti, si trova finalmente la semicorda adattata alla semicurva isocrona bilanciata BZMN nell'istante in cui ha perduto ogni moto. Nella Lettera pubblicata ho dimostrato essere $BZ6 = \frac{1}{2}l + \frac{b^2}{2l}$, ed in una terza Lettera, che avrò l'onore di indirizzarle, provo $BTMV = \frac{1}{2}l + \frac{b^2 - bc\sqrt{2}}{4l}$. Il perché la semicorda passando dal sito BMX al BTMV si è accorciata per la misura $\frac{b^2 - bc\sqrt{2}}{2l}$, e facendo transito dal sito BTMV al BZMN si torna ad allungare per altrettanto, essendo $BZMN = BMX$. I predetti accorciamento, ed allungamento sono le vere cagioni, per cui la semicorda passa primieramente dalla

quiete

260

quiete al moto, e poscia dal moto alla quiete.
Applichi alla semicorda AOX quello che ho detto
della BMX. Nella mentovata terza Lettera
farò vedere, che la curva isocrona bilanciata
composta di moltissime semplici di ciascheduna
parte taglia la retta BX in tanti punti, quante so-
no le curve semplici componenti; dimodochè
la corda con un picciolissimo bilanciamento si
adatta alla curva isocrona.
Per ottenere la medaglia desiderata dal Sig.r
Biancani, ella si rivolga o al Sig.r Giacomo Ma-
riscotti, o al Sig.r Ab. Radavilla, che sono del nu-
mero di quelli, che si sono uniti per onorare
colla predetta medaglia la memoria di mio
fratello.
Il Sig.r Petronio M.r Caldani, ed il Sig.r Ab. Calandrelli
Prof. di Matematica nel Collegio Romano hanno
pubblicato due Dissertazioni contro il Sig. Ab.
Pessuti, alle quali certamente non lascerà di
rispondere.
Mi continui la sua buona grazia, ed amicizia,
e desiderando gli incontri di poterla servire
ho l'onore di protestarmi

Di Lei Sig.r Conte

Sig. Co. Girolamo Fenaroli
Brescia

Div.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Illmo Sig. Sig. Pron Colmo

Ecco a V. S. Illma un'altro frutto de'miei
studj geniali, il quale io penserò che abbia alcun valore,
se otterrà la sua approvazione. Del nostro proseguimento
del Salterio Marcelliano non ho finora che tre Salmi,
e un quarto in isperanza. Oh Cielo quanto è difficile trovare
in questo genere chi sappia, e voglia scrivere! Io nondimeno
non perdo di coraggio, ne diminuirò la sollecitudine: così desi-
dero che V. S. Illma mi conservi in questo il favore, che
da Lei spero. Si degni di darmi novelle della sua
preziosa salute, e de' suoi lavori, e stampe, e in fretta mi
raffermo con tutto l'animo.

Di V. S. Illma

Milano Coll. Imp.le de' Nobili
4 7bre 1774

Devot.mo Obb.mo Ser.re
Giovanni Frichi B.

Di V. S. Ill.

Treviso 4 Settembre 1774

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe
Calandrelli. Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

2.3 6 25 262

rispondere.

Mi continui la sua buona grazia, ed amicizia e desiderando gli incontri di poterla servire ho l'onore di protestarmi

Di Lei Sig. Conte

Sig. Co. Girolamo Ferraroli
Brescia

Divotissimo Obbl. Servitore
Giordano Riccati

Di V. S. Ill:

Treviso 4 Settembre 1778

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

2307 25.

Franca per Venezia

Ill.mo sig. sig. sig. Col.mo
Il sig. Conte Giordano Riccati

Con l'involto
sig. Conte

Treviso

rispondeva. —
Mi continui la sua buona grazia, ed amicizia, e desiderando gli incontri di poterla servire ho l'onore di protestarmi

Di Lei Stimatiss.mo Sig. Conte

Devotiss.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Sig. Co. Girolamo Ferraroli
Brescia

Trovare le tangenti
di una, e di due quinte parti
del semicircolo, il cui raggio = 1

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 263

Il distinto favore, che V.S. Ill.ma mi ha fatto di prendere la difesa di mio Fratello, ed il preciso debito, che mi correva di ringraziarla, mi avranno prodotto il vantaggio della sua letteraria corrispondenza, che pregio al sommo. Per obbedirla le spedisco le avvertenze, che mi è riuscito di fare sopra il dottissimo suo Saggio Analitico, le quali io sottopongo al suo purgato giudizio, ed a quello dello stimatissimo P. Jacquier, a cui la prego di portare i più divoti miei complimenti. Le potrà confrontare con ciò, che le scriveranno i Sig.ri Ab. Boscovich, d'Alembert, Frisi, e Fontana, ed io sarò sempre pronto a rimettermi al sentimento di questi Uomini illustri. Ed esibendola la costante mia servitù, con pienissima stima, ed ossequio mi dichiaro

Di V.S. Ill.ma

Treviso 4 Settembre 1776

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

2367 25

267

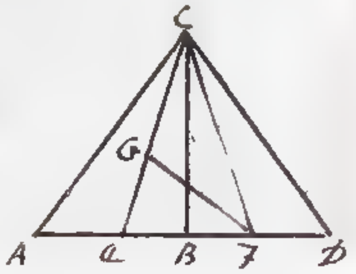
Trovare le tangenti
di una, e di due quinte parti
del semicircolo, il cui raggio = 1

2 3 67 25

Trovare le tangenti
di una, e di due quinte parti
del semicircolo, il cui raggio = 1.

Trovare la tangente della quinta parte del semicircolo, il cui raggio = 1.

Sia il raggio del circolo BC = 1, la tangente cercata BA = BD = z. L'angolo ACB uguale a $\frac{2}{5}$ di retto si divida in due parti uguali colla retta CE, e lo stesso si faccia dell'angolo BCD mediante la retta CF. Avremo pertanto AC : CB :: AE : EB, e componendo




AC + CB : CB :: AB : EB, o analiticamente

$$\sqrt{1+z^2}+1 \;:\; 1 \;::\; z \;:\; \frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1} = \begin{cases} EB \\ BF \end{cases}$$

ma $\overline{EC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2$; dunque $\overline{EC}^2 =$

$$1 + \frac{z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)^2} = \frac{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)^2}, \text{ e quindi}$$

$$EC = \frac{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}{(\sqrt{1+z^2}+1)}.$$

Poichè ECB = $\frac{1}{5}$ di retto, sarà CEF = $\frac{4}{5}$ di retto, ed il triangolo isoscele ECF avrà la proprietà, che l'angolo al vertice pareggerà la metà di ognuno di quelli alla base. Diviso dunque l'angolo CFE per metà colla retta FG, il triangolo EFG sarà simile all'ECF. Il perchè avremo

$$EC : EF :: EF : EG = \frac{\overline{EF}^2}{EC} = \frac{4\,\overline{EB}^2}{EC}.$$

Sostituiti in cambio di EB, e di EC i valori determinati, troveremo

$$EG = \frac{4z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)^2 \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}{\sqrt{1+z^2}+1}} =$$

$$\frac{4z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)\cdot\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}.$$

Gli angoli uguali GCF, GFC

manifestano

manifestano isoscele il triangolo ZGC, e perciò $CG = GZ = EZ = \dfrac{2z}{\sqrt{1+z^2}+1}$.

Avremo dunque $EC = EG + GC =$

$$\frac{4z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)\cdot\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

; ma si è di sopra scoperto

$$EC = \frac{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

; dunque

$$\frac{4z^2}{(\sqrt{1+z^2}+1)\cdot\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}} + \frac{2z}{\sqrt{1+z^2}+1} = \frac{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}{\sqrt{1+z^2}+1}$$

e conseguentemente

$$4z^2 + 2z\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2} = (\sqrt{1+z^2}+1)^2 + z^2$$

Per agevolare il calcolo, faccio $\sqrt{1+z^2}+1 = x$, onde ne risulta $\sqrt{1+z^2} = x-1$, $1+z^2 = x^2-2x+1$, $z^2 = x^2-2x$, $z = \sqrt{x^2-2x}$. Effettuate le sostituzioni ci si presenterà

$$4x^2-4x+2\sqrt{x^2-2x}\sqrt{x^2+x^2-2x} = x^2+x^2-2x,$$

ovvero espurgando la formola, e dividendo per $2x$

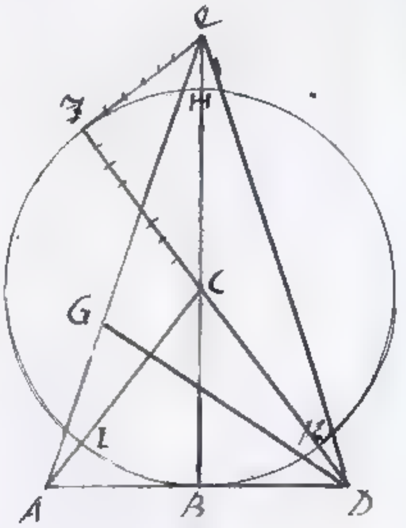
$\sqrt{x-2\,.\,2x-2} = 3-x$, ed alzando al quadrato, $2x^2-6x+4 = x^2-6x+9$ e quindi $x^2 = 5$, ed $x = \sqrt{5}$.

Nella formola $z^2 = x^2-2x$ si sostituiscano in cambio di $x^2$, e di $x$ gli scoperti valori, e ne proverrà $z^2 = 5-2\sqrt{5}$, e finalmente $z = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ il che &c.

Seconda soluzione

Descritto il circolo BIZHKB col raggio $BC = 1$, siano BI, BK la quinta parte del semicircolo, e descritta ABD normale a BC, si tirino le secanti CIA, CKD, che determineranno le tangenti BA, BD degli archi BI, BK, dalle quali si cava il valore. Segno CE = CD nella linea BC prodotta, e conduco le rette AE, DE.

~~e continuata DC sino ad ... pandansi pagli ... BK, sarà ... AD la sua tangente.~~ L'angolo BCD è doppio di ciascuno degli angoli CDE, CED, ed essendo $BCD = \frac{2}{5}$ di retto, sarà $BED = \frac{1}{5}$ di retto, e per conseguenza $AED = \frac{2}{5}$ di retto, ed ognuno degli angoli EAD, EDA eguale a $\frac{4}{5}$ di retto. Diviso per metà l'angolo EDA colla linea DG, ne risulterà $GDA = \frac{2}{5}$ di retto, ed il triangolo ADG si scoprirà simile all'AED, ed eguagliandosi gli angoli GDE, GED, avremo $EG = GD = DA$.




Pongo $AB = BD = z$, e ne proverrà $AC = DC = CE = \sqrt{1+z^2}$, e conseguentemente $BE = \sqrt{1+z^2}+1$, $AE = \sqrt{\overline{BE}^2+\overline{AB}^2}$
$= \sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}$

La similitudine dei triangoli EAD, ADG mi somministra l'analogia $AE : AD :: AD : AG$
$= \frac{\overline{AD}^2}{AE} = \frac{4z^2}{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}}$. Ora $AE$
$= AG + GE = AG + AD$; dunque
$AE = \frac{4z^2}{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}} + 2z$; ma si è trovato $AE = \sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}$; dunque

$$\frac{4z^2}{\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}} + 2z = \sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}$$

e quindi

(A) $$4z^2 + 2z\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2} = (\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2$$

o sia

$$5z^2 = (\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2 - 2z\sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}+z^2$$

ed estraendo la radice

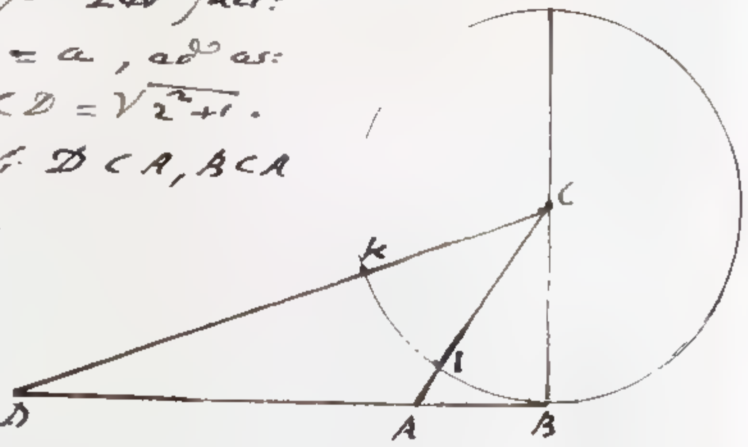
$z\sqrt{5} = \sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2} - z$, ovvero $z\cdot\overline{1+\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2}$. Alzo i due membri al quadrato, e trovo $z^2\cdot\overline{1+2\sqrt{5}+5} = (\sqrt{1+z^2}+1)^2+z^2$, ed indi $z^2\cdot\overline{5+2\sqrt{5}} = (\sqrt{1+z^2}+1)^2$, e cavata la radice $z\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+z^2}+1$, o sia $z\sqrt{5+2\sqrt{5}}-1 = \sqrt{1+z^2}$. Alzo nuovamente al quadrato e mi si presenta $z^2\cdot\overline{5+2\sqrt{5}} - 2z\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 1 = 1+z^2$, e perciò $z^2\cdot\overline{4+2\sqrt{5}} - 2z\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 0$, e dividendo per $2z$, $z\cdot\overline{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ e finalmente $z = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$, il che &c.

Se per ridurre la formola A avessi tenuto il metodo della prima soluzione, avrei trovato $z = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Ora è facile da provare essere $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, e quindi $\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2\cdot(5-2\sqrt{5})} = \sqrt{(9+4\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}$, mostrandoci il calcolo $\sqrt{(9+4\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \sqrt{45+\overline{20-18}\sqrt{5}-4}$ $= \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Giungeremo facilmente alla formola $z = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ moltiplicando e dividendo l'espressione $z = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, onde s'abbia $z = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{(2+\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$: ma $\overline{2+\sqrt{5}}\sqrt{5-2\sqrt{5}} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$; dunque $z = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, il che &c.

Trovare la tangente delle due quinte parti del semicircolo il cui raggio $= 1$.

Dopo avere determinata la tangente dell'arco $AI = \frac{1}{5}p$, cioè a dire $BA = \sqrt{5-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$, riesce facile lo scoprire il valore della tangente $BD = z$ dell'arco $BIK = 2BI = \frac{2}{5}p$. Per facilitare il calcolo faccio $BA = a$, ed essendo $CB = 1$, ne risulta $CD = \sqrt{z^2+1}$. L'eguaglianza degli angoli $DCA$, $BCA$ somministra l'analogia




$CD : DA :: CB : BA$

o sia analiticamente

$\sqrt{z^2+1} : z-a :: 1 : a,$

e quindi l'equazione $a\sqrt{z^2+1} = z-a$, ed alzando al quadrato $a^2z^2 + a^2 = z^2 - 2az + a^2$, e conseguentemente $a^2z^2 = z^2 - 2az$. Dividendo per $z$, mi si presenta $\overline{1-a^2}\cdot z = 2a$, e perciò $z = \frac{2a}{1-a^2}$. Sostituisco nel denominatore il primo valore di $a = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$, e scopro $z = \frac{2a}{1-5+2\sqrt{5}} = \frac{2a}{2\sqrt{5}-4} = \frac{a}{\sqrt{5}-2}$.

Dopo ciò pongo nel numeratore la seconda espressione del valore di $a = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+2}$, e ne proviene $z = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\overline{\sqrt{5}-2}\cdot\overline{\sqrt{5}+2}}$: ma $\overline{\sqrt{5}-2}\cdot\overline{\sqrt{5}+2} = 5-4 = 1$; dunque $z = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$; il che &c

Se avessi collocata nel numeratore la prima espressione del valore di $a$, mi si sarebbe affacciata la formula meno semplice $z = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-2}$ la quale moltiplicandola, e dividendola per $\sqrt{5}+2$ si riduce facilmente

alla

all'equazione primitivamente scoperta
$z = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 

Prendo l'opportunità, che il Sig.r Ab. Luigi Zanotto passa per cotesta Città, accompagnando a Siena il Sig.r Cont.mo Francesco Spineda, e col mezzo suo faccio tenere a V.S. Ill.ma un involto con due Dissertazioni, che dopo averle lette farà grazia di spedirle a Modena al Sig.r Ab. Domenico Troili. È composta la prima da sei Lettere, cinque di mio Fratello, ed una mia sopra i Logaritmi dei numeri negativi. Penso ch'Ella avrà piacere di leggere le cinque Lettere dell'Ab. Vincenzo, nelle quali sembrami che tratti a fondo il proposto argomento. Giudico bene di pubblicarle per far vedere al Sig.r Ab. Pessuti, che non solo era nota a mio Fratello la Memoria dell'Eulero, ma che di più l'ha esaminata ben bene, mettendo in chiaro la fiacchezza delle sue ragioni contro al Bernoulli.

Due Lettere dirette al Sig.r Co. Girolamo Zanaroli formano la seconda Dissertazione, nella quale supponendo applicata una penna al punto medio di una corda, determino, lasciata che sia in libertà, il tempo impiegato a passare dalla prima posizione alla curva isocrona bilanciata o semplice di un ventre solo, ovvero composta delle due semplici di

un

all' equazione primieramente scoperta
$z = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

274

un solo vero, e di re. Questa Lettera mi pre[me]
che esamini attentamente, e che mi comunichi il
riputatissimo suo parere. Sembrami d'aver
mosso qualche passo per una strada scoscesa,
e toccherà a Lei giudicare, s'io ci sia bene o male
riuscito. Postochè non abbia niente in contrario,
la mandi al Sig.r Ab. Trenti, ed in caso diverso mi
partecipi, come la supplico, le difficoltà, che avrà
concepite. Mi onori de' suoi preziosi comandi,
e condoni i replicati disturbi, che le reco, siccome
cagionati da quella indelebile stima, che mi
farà sempre essere

Di V.S. Ill.ma

Treviso 14 Settembre 1776

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Sig.r P.ron Col.mo

ò
le
hi
iti
to
o
iti
otti,
o
,
Del — A
fà
Mi=
b
otti
le

all' equazione primitivamente scapava
$z = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Ill.mo Sig.r Sig.r Pad.ne Col.mo

Io ringrazio V. S. Ill.ma del gentile gradimento, col quale ha accolto la spedizione del Saggio analitico del Sig.r Ab.te Calandrelli; e molto più del gradimento della lettera mia sopra le riflessioni analitiche del Sig.r Pessuti. Avrei a vivere gli anni di Noè, e tutti se gl'impiegassi in procurare di menar la memoria del Sig.r Co: Vinci non potrei rendere un atomo degl'infiniti obblighi, che gli professo. Mi dorrà certamente se non sarà approvato quanto ho fatto finora in sua difesa, ma almeno ho fatto quanto ho potuto, e saputo, e seguirò a farlo, ove gli avversarj mi facciano risposta, che non mi convinca ad evidenza.

Se il Sig.r Pessuti mi dirà, che il nulla non è il solo valore di $L{-1}$, ma che ve ne sono infiniti altri, lo pregherò a dimostrarmelo, nè credo, che mi dirà esser uno dei detti valori $=p\sqrt{-1}$, perchè intanto egli ricava quegl'infiniti valori, che si leggono nelle sue riflessioni in quanto che suppone $aL\sqrt{-1}=L{-1}$; ma questo è appunto quello, che io impugno, e questo è quello, ch'egli non può addurre per rispondermi.

Egli vede, che $L{-1}$ sia assolutamente quantità immaginaria, ed esclude $L{-1}=0$; ma dal suo calcolo istesso trovandosi $L{-1}=0$, dovrà confessare assolutamente non essere $L{-1}$ q.tà immaginaria.

Il nulla moltiplicato per due q.tà finite rende i prodotti $=0$: verissimo, se il nulla, che moltiplica una delle q.tà sia della stessa natura di quello, che moltiplica l'altra. Così $a$, $b$ moltiplicate per zero danno $0.a=0.b$, e moltiplicati per $0\sqrt{-1}$ danno $a.0\sqrt{-1}=b.0\sqrt{-1}$ ma non deducesi quindi, che debba essere $a.0=b.0\sqrt{-1}$, se non sia $0=0\sqrt{-1}$, ch'è ciò, che è in questione.

Certamente se l'analogia da me proposta di $0:0\sqrt{-1}::a:a\sqrt{-1}$ si convertè nell'altra di

di marzo ~~…~~ $\frac{7}{10}$ ,
calando da quello all'incerca per $\frac{1}{3}$ di Comma …
~~sopra questo~~ crescendo per $\frac{4}{3}$. Avendo i Greci
conosciuti i due Diatonici diatono, e sintono,

aperta mente

$0:0::a:a\sqrt{-1}$, che ebra non regge, ma non regge per questo appunto, che si vede o... è infallibile, che i prodotti degli estremi, e dei medj sono uguali nell'analogia non mettendosi $0=0\sqrt{-1}$, e che non sono uguali mettendosi $0\sqrt{-1}=0$. In tal caso quale delle due analogie dee anteporsi?

Quantunque poi sia vero, che $a.0=mb.0$, pure quando si tratti di avere il rapporto di $a:b$ non può farsi $mb.0=b.0$, e così $a.0=b.0$. Le due quantità $a, b$ che si paragonano certo è, che diventan nulle col moltiplicarle per zero, ma ciò non vuol dire, che non abbiano fra loro una ragione finita e determinata, che può rappresentarsi anche da $m.0:0$, e però non può dirsi falsa, anzi dee dirsi legittima, e verissima l'analogia di $0.1:0.2::a:2a$; ma si finisca di annojarla.

Al Dr. Calandrelli feci sapere per mezzo di un suo amico le gentili di Lei disposizioni a communicargli alcune di Lei difficoltà sopra il saggio, che ha pubblicato. Ora so, che egli se n'è prevalso, e che stà attendendo le sue grazie. Scusi se non ho risposto prima giacchè una grave malattia accaduta in mia casa non mi ha permesso di farlo. Sono sempre con tutto l'ossequio

Di V.S. Illma

Roma 20 8bre 1776

Umo, Dmo Obbmo Servre
Petronio Ma. Cald

cine

di mezzo ~~per il tono ... ed il minore~~ $\frac{9}{10}$, calando da quello all'incirca per $\frac{1}{3}$ di Comma, e ~~sopra~~ questo crescendo per $\frac{2}{3}$. Avendo i Greci conosciuti i due Diatonici diatono, e sintono,

accuratamente

All' Ill.mo Sig.r Sig.r Pad.n Col.mo
Il N. U. Sig.r Co: Giordano Riccati

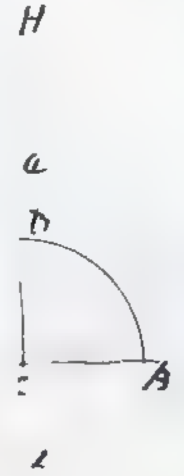
Treviso.

del Sig.r Co. Giordano Riccati
Annotazioni al Saggio
Analitico del Sig.r Ab.
Giuseppe Calandrelli
sopra la Riduzione degli
Archi circolari a' Loga-
ritmi immaginarj

Risposta all'Ill.mo Sig.r Ab. Calandrelli (S IV.)

Molto Rev.do Sig. Sig. P.rone Col.mo 277

Al prezioso dono della dottissima, ed eruditissima Opera da V. R. recentemente data alle stampe della natura e perfezione della antica Musica de' Greci. Ecco io corrispondo con più rispettosi, singolariamenti, ossequiosi. Ella va sempre con nuove, e lodevolissime produzioni illustrando la Musica, ed in questa dimostra la vasta sua erudizione, e quanto si sia profondata nella intelligenza dei Greci, e dei Latini Scrittori.

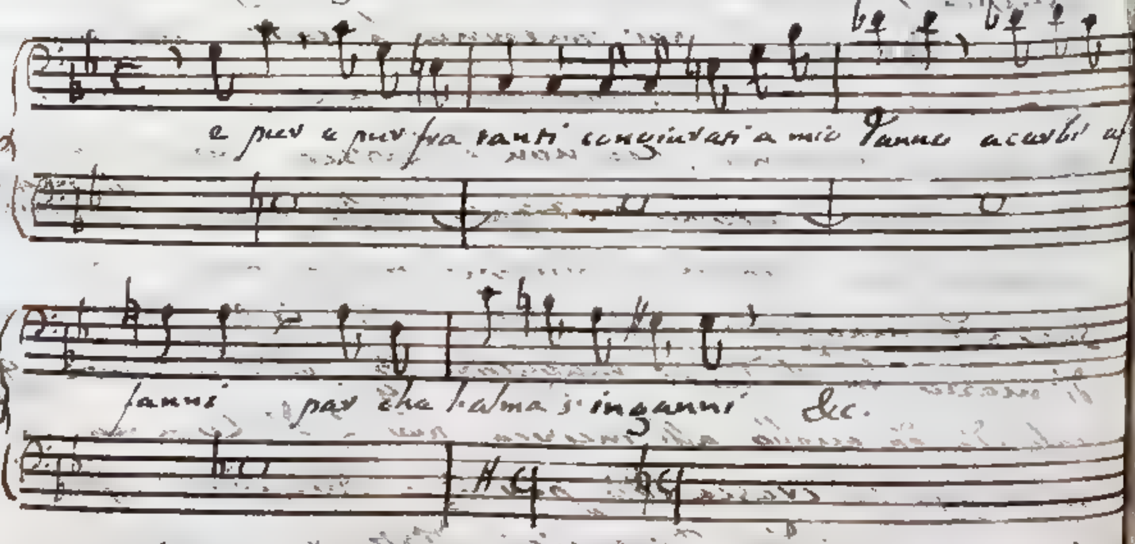



Egli è infallibile, che la Greca Musica era della stessa natura della nostra sì nella misura dei tempi, che nella serie dei suoni. Primieramente non si sono adoperate mai, né si adopravano altre Battute primitive, salvoché a due tempi, e a tre tempi, dalle quali, come ottimamente nota V. R., ne deri- vano alquante secondarie, che a quattro tempi, sestupla, nonupla, e dodecupla si sogliono nomi- nare. ~~Per quello poi concerne la serie dei suoni non profondando dal temperamento, usiamo il~~ Diatonico sintono, che non differisce sensibilmente dal Diatonico diatono ~~mitigato dalla nostra~~, ~~e che~~ uguale coincide col Diatonico sintono temperato. Le Seconde maggiori C D, D E, F G, G A, A B stanno di mezzo tra il Tuono maggiore $\frac{8}{9}$, ed il minore $\frac{9}{10}$, calando da quello all'incirca per $\frac{1}{3}$ di Comma, e sopra questo crescendo per $\frac{2}{3}$. Avendo i Greci conosciuti i due Diatonici diatono, e sintono,

apertamente

apertamente si scopre, che il Diatonico moderno conviene coll'antico. ...

I Greci frattanto hanno considerati due altri sistemi l'Enarmonico, ed il Cromatico. Cominciando dal primo, determinano essi la divisione Enarmonica dei tetracordi, e ci fanno poscia sapere, che un tal sistema per la sua soverchia difficoltà era andato in dimenticanza. La ripugnanza, che provava l'orecchio nelli intonare gli elementi Enarmonici, era una prova convincente della irregolarità del sistema. Noi facciamo in qualche maniera uso delli Enarmonici, quando per esempio passiamo da E♭ a D♯, le quali note, se i nostri strumenti avessero i sopratasti, differirebbero per un elemento Enarmonico. Ecco un esempio preso dalla Cantata <u>Udite amanti udite</u> del Sig.r Benedetto Marcello.




il quale per essere rettamente intonato richiede a

gran

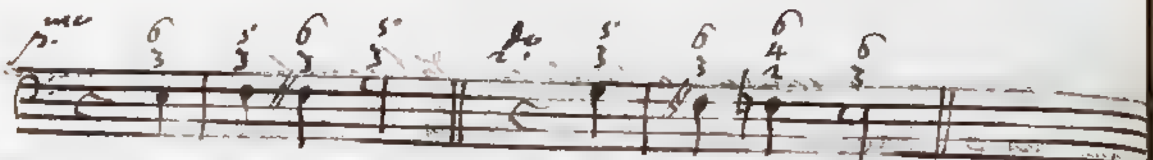
del Sig. Co. Giordano Riccati
Annotazioni al Saggio
Analitico del Sig. Ab.
Giuseppe Calandrelli
sopra la Riduzione degli
Archi circolari ai Loga-
ritmi immaginarj

Risposta dell'Ill.mo Sig. Ab. Calandrelli (§ IV.)

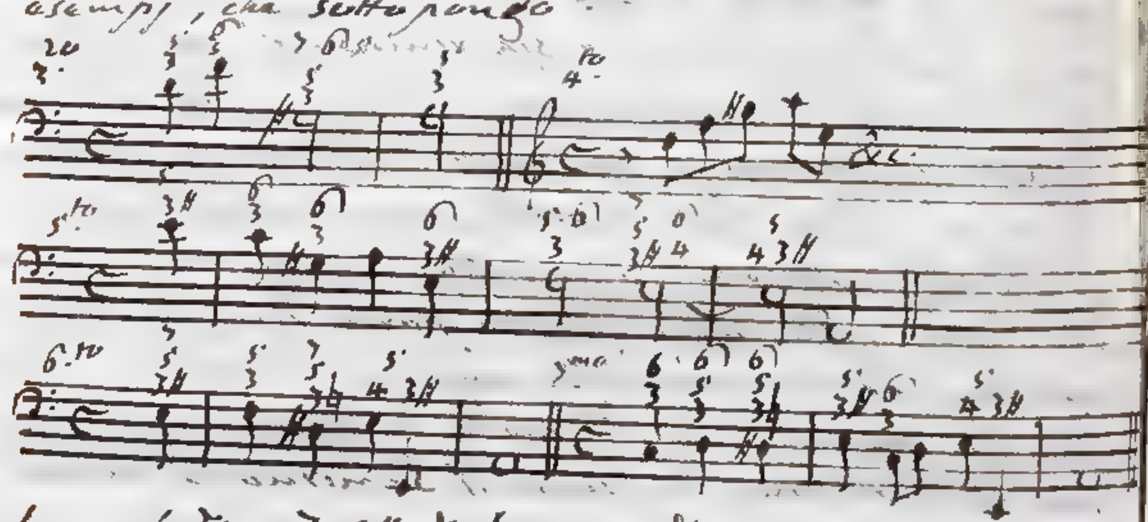


gran perizia di canto, o l'ajuto del cembalo. Io noto nel mio Saggio, che la difficoltà di intonare gli elementi Enarmonici dipende da ciò, ch'essi ci conducono da tuono a tuono, che non sono insieme legati da una mutua subordinazione. Infatti nell'allegato esempio il passaggio C b$^{4}_{2}$ D$^{6\,5}_{3\,\natural}$ ci guida dal tuono di B fa con terza maggiore al tuono di A la mi re con terza minore, che non è al precedente subordinato.

(hanno data inoltre i Maestri Greci la divisione Cromatica dei tetracordi. Io congietturo, ch'essendo per la incursioni dei barbari con l'altre belle arti decaduta ancora la Musica, si sia disusato il Cromatico siccome il più artifizioso, e sia rimaso il solo Diatonico siccome il veramente naturale. E per verità soltanto il Diatonico nei Canti Ecclesiastici si pone in opera. Ma allora quando tornarono le belle arti all'antica coltura, si ripigliò la pratica del sistema Cromatico, dal quale in gran parte dipende l'ornamento, ed il vezzo della moderna Musica. Non facendo uso che di corde naturali, si adopera con approvazione del senso il Semituono minore elemento Cromatico, qualora col suo mezzo si passerà da un dato Tuono ad un altro subordinato, il che accade negli esempj primo, e secondo, nei quali le corde [illegible], [illegible] sono naturali, quella del Tuono C, e questa del Tuono G amendue per terza maggiore, i quali sono mutuamente subordinati.



La principale introduzione in Musica del Sistema Cromatico dipende dalle corde artifiziali, che sono nel Modo minore la settima, la sesta, la quarta, e la seconda, e nel Modo maggiore la sola quarta. Nel primo esempio la corda F# si userà frequentemente come quarta artifiziale del Tuono C per Terza maggiore. Le corde artifiziali arricchiscono la Musica colla Cromatica armonia, e melodia, il che V.S. osserverà negli esempj, che sottopongo.



La melodia F C# di Settima diminuita all'ingiù, F G# di Seconda superflua all'insù sono contenute negli esempj 3.zo e 4.to Dimostra l'esempio 5.to la melodia C G# di Quarta diminuita all'ingiù, l'esempio 6.to quella F D# di Terza diminuita all'ingiù, e l'esempio 7.mo contiene il movimento D D#

di

Dal Sig.r Co. Giordano Riccati
Annotazioni al Saggio
Analitico del Sig.r Ab.
Giuseppe Calandrelli
sopra la Riduzione degli
Archi circolari ai Loga-
ritmi immaginarj

Risposta del Ill.mo Sig.r Ab. Calandrelli (§ IV.)

n. 61

di Semituono minore all'ingiù. Si comprendono queste armonie Cromatiche G# 3/5 di Terza minore, Quinta e Settima ambo diminuite nell'esempio 3.zo; e 3# di Terza maggiore e Sesta minore nell'esempio 5.to; D# 3/5 di Terza, Quinta, e Settima tutte e tre diminuite nell'esempio 6.to; D# 3/5 di Terza e Quinta amendue diminuite, e Sesta minore nell'esempio 7.mo

Gli allegati esempj adunque dimostrano, che l'orecchio umano talvolta gusta proporzioni diverse da quella del Genere Diatonico; purchè siano giudiziosamente usate, e secondo le regole del Contrappunto.

Ella ottimamente sostiene, che i Greci non avessero Contrappunto, e la sua Dissertazione seconda è ricolma di fino varia e scelta erudizione. Questa era una grande imperfezione della Musica antica: e certamente al presente nello scrivere una parte acuta, si osserva di guidar quel basso, che il fondamento ne forma.

Ma io sarei troppo lungo, se volessi seguitare passo passo la sua bellissima Opera. Dirò adunque alcune poche cose della utilità della Musica applicata alla educazione de' Giovani. Io consiglierei sempre un Giovane d'applicarsi alla Musica per tutti quei motivi, che V. R. saggiamente discute. Egli è vero, che si può urtar nello scoglio dell'amicizia colle Cantatrici. Ma Ella ~~saggiamente~~ opportunamente riflette, che fra i molti,

che

che fanno loro la corte, il minor numero è di quelli che ne sanno di Musica. Oltrechè non bisognerebbe insegnare ai Giovani nè la Poesia, nè la Scherma, nè il Ballo, perchè anche queste cognizioni possono loro servire di inciampo.

In somma V. R. ha pubblicata un Opera da par suo, ed io me ne rallegro infinitamente con Lei, nè lascio di protestarle la mia obbligazione, e pel dono, che me ne ha fatto, e per aver fatta di me onorevole menzione in due luoghi.

Nel Tomo XIII. del Giornale de' Letterati di Italia si legge una mia Lettera, nella quale indago l'artifizio, di cui si serve la Natura per far sì, che incitata una corda al suono, si adatti in brevissimo tempo ad una curva bilanciata, ed isocrona. Il Tomo XIV., che sta per uscire, conterrà una seconda Lettera, in cui determino l'equazione generalissima delle curve bilanciate, ed isocrone; e nei Tomi susseguenti si inseriranno altre due Lettere, in cui supponendo applicata la penna al punto medio di una corda, determino, lasciata che sia in libertà, il tempo impiegato a passare dalla prima posizione alla curva isocrona bilanciata o semplice di un ventre solo, ovvero composta delle due semplici di un solo ventre, e di pr[?]

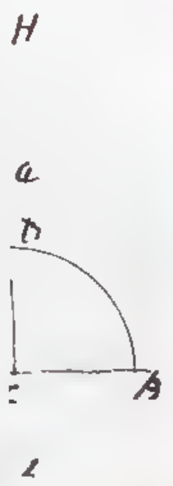
Prima però altro nel Tomo XV. si stamperà la Risposta alle Riflessioni Analitiche del Sig. Ab. Gioacchino [illegible] sopra una Lettera scrittagli

da l'

dal Sig.r Co. Giordano Riccati
Annotazioni al Saggio
Analitico del Sig.r Ab.
Giuseppe Calandrelli
sopra la Riduzione degli
Archi circolari ai Loga=
ritmi immaginarj
Proveniente dall'Ill.mo Sig.r Ab. Calandrelli (§ IV.)

283

dal Sig. Ab. Co. Vincenzo Riccati, ed inserita ulti=mamente nella Nuova Raccolta di Opuscoli Scientifici e Filologici stampata in Venezia nell'anno 1776. Questa Risposta l'ho distesa io, ma comparirà anonima a cagione del carattere poco obbligante del Sig. Ab. Lassuti. Avendo ques=ti dato l'estratto delle Istituzioni Analitiche di mio Fratello nei Tomi primo, e secondo del mento=vato Giornale, ed in mezzo a molti elogi avendo frammischiata qualche censura, giudicò l'Ab. Vin-cenzo di indirizzargli lo 14 Agosto 1773. una lunga Lettera, in cui rendeva buon conto delle ragioni, che l'aveano indotto ad operare come avea creduto espediente, e nello stesso tempo l'avvertiva amichevolmente di alcune cosarelle, che avea notate leggendo l'estratto. Sopravvisse mio Fratello mesi sedici e mezzo, cioè a dire sino ai 17. Gen-najo dell'anno 1775., in cui passò a miglior vita, nè mai ebbe il contento di ricevere risposta dal Sig. Ab. Lassuti. Avendo io fatta riflessione, che erano pubbliche le censure, giudicai opportuno il pubblicare ancor la difesa, inserendo la detta Lettera nel Tomo XXX. della Nuova Raccolta di Opuscoli. Determinò questa Lettera il Sig.r Ab. Lassuti a rispondere, facendo imprimere in Livorno le sue Riflessioni Analitiche, nelle quali protesta di aver non fatto di mio Fratello



244

I Sig.ri Petronio Maria Caldani, ed Ab. Giuseppe Calandrelli hanno dato alla luce in Roma due Dissertazioni contro alle nominate Riflessioni, alle quali aggiungendosi ancora la mia Risposta vedremo cosa sarà per replicare il Sig. Ab. Pessuti. Anzi asserendo questi, che l'Ab. Vincenzo non avea letta una Memoria dell'Eulero, in cui tratta dei Logaritmi dei numeri negativi, ed immaginarj; ho spedito a Modena sei Lettere cinque di mio Fratello, e una mia, nelle quali si discute a fondo questo argomento, e nella quarta singolarmente dall'Ab. Vincenzo si esamina l'indicata Memoria.

Io grazie a Dio godo buona salute, e desideroso degli incontri di poterla servire con pienissima stima, e riconoscenza ho l'onore di protestarmi

Di V. R.

Treviso 30 Settembre 1776.

Molto Rev.do P. D. Giovenale Sacchi A. Milano

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

dal Sig.r Co. Giordano Riccati
Annotazioni al Saggio
Analitico del Sig.r Ab.
Giuseppe Calandrelli
sopra la Riduzione degli
Archi circolari ai Loga-
ritmi immaginarj

Prevende l'ill.mo Sig.r Ab. Calandrelli (§ IV.) assunta l'equazione $1 = \frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ quando è infinita la tang. $z$, perchè moltiplicando e dividendo per $z+a\sqrt{-1}$ ne risulta $z^2+a^2 = z^2-a^2-2az\sqrt{-1}$, e però $2a^2+2az\sqrt{-1}=0$, ch'è quanto a dire una quantità infinita eguale a nulla. Dubito ch'egli in questo incontro non abbia ben intesa il linguaggio dell'analisi, il quale non significa che $2a^2+2az\sqrt{-1}$ sia eguale a nulla assolutamente, ma soltanto in relazione a $z^2$. La formola $z+b=z$, ch'è falsa quando $z$ è finito, diventa vera quando $z$ ascende all'infinito, essendo in tal caso trascurabile la quantità finita $b$. Io dimostro la verità della formola $1=\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ nel seguente modo. La (fig. 1.) tangente $z = AG$ è infinita, quando l'arco si eguaglia al quadrante $AD$, ed in tal circostanza la secante $CG$ è parallela alla tangente $AG$. Tirata $CH$ parallela ad $AG$, segno $Ce = 1$, e delineo $ey$ parallela ad $AB$. Poichè $CG$ è parallela ad $AG$, sarà $ey = 0$. Avremo dunque per la similitudine dei triangoli $yeC$, $CAG$, $ye = 0 : Ce = 1 :: CA = a : AG = z$ e conseguentemente $z = \frac{a}{0}$. Sostituito questo valore nella formola, scopro

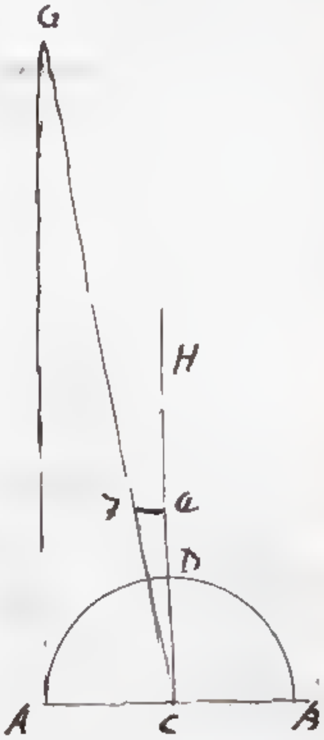


Fig. 1

$1 = \frac{\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0} + a\sqrt{-1}} = \frac{1 - 0\sqrt{-1}}{1 + 0\sqrt{-1}}$ Ora il nulla non è nè positivo, nè negativo, oppure va del pari positivo e negativo; e quindi io posso scrivere $1 = \frac{1+0\sqrt{-1}}{1+0\sqrt{-1}}$, equazione patentemente vera.

Per ~~confermare~~ esaminare ~~quello~~ ciò che dice lo Stimat.mo Sig. Ab. ~~de~~ S.V. che la intera periferia può stare al diametro come $l1 : \sqrt{-1}$, osservo, che chiamata $p$ la semicirconferenza, abbiamo la serie aritmetica $0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p, p$. Ai primi tre termini pel Sig.r Bessuti corrisponde la serie geometrica $1, \sqrt{-1}, -1$; dunque l'intera serie geometrica relativa all'aritmetica sarà $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$. E perchè $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l1 = p$, e perciò $\frac{a}{\sqrt{-1}} l1 = 2p$. Avremo dunque

$2p : 2a :: \frac{a}{\sqrt{-1}} l1 : 2a :: \frac{1}{2} l1 : \sqrt{-1}$.

Egli è vero che $\frac{1}{2} l1 = l\pm 1$; ma nel nostro caso va prescelto il segno negativo, essendo nella serie $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$ negativo il termine medio $-1$. ~~anzi~~. Se i ~~primi~~ termini della serie geometrica fossero $-1, -\sqrt{-1}, 1, \sqrt{-1}, -1$, si troverebbe $2p : 2a :: \frac{a}{\sqrt{-1}} l1 : 2a :: \frac{1}{2} l{-1} : \sqrt{-1}$: ma nella predetta serie il medio geometrico fra $-1$ e $-1$ è $= 1$; dunque $\frac{1}{2} l{-1} = l1$, e quindi $2p : 2a :: l1 : \sqrt{-1}$. Supponendo

il

il protonumero = 1; si raccoglie la proporzione del Bernoulli $l\,{-1} : \sqrt{-1}$. Ma posto lo stesso Bernoulli il protonumero anche $-1$; dunque dee valere anche l'altra ragione $l\,1 : \sqrt{-1}$. Dalla quadratura dell'iperbola fra gli assintoti si deduce, che fissato 1 come protonumero, è parimente tale $-1$. Per la qual cosa avremo le due serie relative $\pm 1, \pm\sqrt{-1}, \mp 1, \mp\sqrt{-1}, \pm 1$

$0,\ \frac{1}{4}p,\ \frac{1}{2}p,\ \frac{3}{4}p,\ p$

che ci insegnano riferirsi lo stesso logaritmo a due numeri uguali uno positivo, e l'altro negativo.

~~Neanche più accurato~~ altro è vero quello che afferma nel § VII essere la tangente d'un arco eguale a quella dell'arco compimento al semicircolo. ~~Queste due tangenti sono bensì eguali ma una positiva, e l'altra negativa come ap-~~ parisce dalla figura 2. Sia l'arco $AD = u$; l'arco $Ad = q$, ed avremo

$$u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}},\quad q = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{a-z\sqrt{-1}}{a+z\sqrt{-1}} + p$$

e perciò $u + q = p$ ~~$\frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}} \cdot \frac{a-z\sqrt{-1}}{a+z\sqrt{-1}}$ =~~ ~~perciò~~. Egli è poi indubitato, che essendo nulla la tangente $AG = 0$ è parimente $AD = 0$, nel qual caso $Ad$ è un semicircolo, ~~......~~, onde l'arco nullo, ed il semicircolo abbiano la stessa tangente $= 0$.

Posta $z$ tangente dell'arco $u$, sarà $du = \frac{dz}{z^2+1}$ nell'ipotesi di $a = 1$. Ma

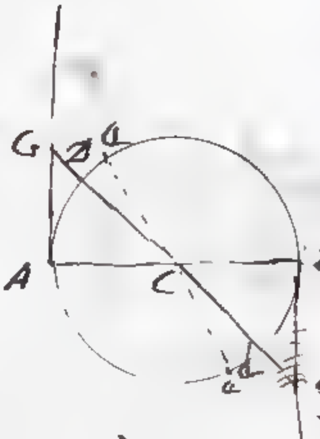


Fig. 2.

Quantunque rettamente afferm il Sig.r Ab. nel § VII. pag. 17. essere la tangente d'un arco $AD = u$ eguale a quella dell'arco $Ad = q$ compimento al semicircolo $DAd = p$; nulladimeno egli è d'uopo avvertire, che se $AD$ cresce per l'elemento $Dd$, $Ad$ cala per altrettanto. Perciò se $du = \frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$, sarà $-dq$

$dy = -\frac{a^2 dz}{a^2+z^2}$ : ma $u = \int \frac{a^2 dz}{a^2+z^2} = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$, e $y = p - u$; dunque $y = p - \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a+z\sqrt{-1}}{a-z\sqrt{-1}}$. Vegga il Sig.r Ab. se con questa riflessione si possa accordare il raziocinio contenuto nel proseguimento del citato § VII.

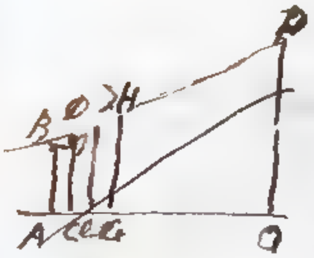



Fig. 3.

Ma quanto cresca $AD = u$, altrettanto cala $PD = y'$; dunque ne risulterà $du = -\frac{dz}{z^2+1}$. Quindi avremo integrando $y' = p - \int \frac{dz}{z^2+1} = p - u$, e conseguentemente $u + y' = p$. Questa riflessione dimostra cadere tutto il raziocinio del Sig.r Ab. contenuto nel citato § VII.

Il Sig. Ab. disapprova nel § VIII. il metodo con cui l'Eulero determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale, o immaginario, positivo, o negativo. Il metodo ~~non~~ [per verità non sembravami] è soggetto a critica, se non in quanto non dà la soluzione compiuta. ~~Nonostante il Sig.r Ab. che $(1+i)^n$ possa divenire uguale alla quantità fissa [illegible] logaritmo = y in Sig. (Ab.). AB = 1, AC = y, CD = x. Si tiri da y per [illegible] [illegible] sia AC = [illegible] y, e si tiri [illegible] CD, e [illegible] supponendo la suttangente uguale al [illegible] A B = 1, sarà [illegible] parallela ad AQ, e sarà AK = AD, e quindi [illegible] = y/n [illegible] il Sig.r Eulero. Avremo pertanto AB = 1, CD = 1+i, EF = (1+i)^2, GH = (1+i)^3 e così di seguito [illegible] perché [illegible], l(1+i)^2 = 2i, l(1+i)^3 = 3i, e finalmente l(1+i)^n = ni; ma ni = y = AC; dunque (1+i)^n = x = CD; il che [illegible].~~ Incontrandosi le due soluzioni del Pessuti, e dell'Eulero

nella

nella medesima conseguenza, se è giusto il metodo del Bassuti, ha da esser tale anche quello dell' Euler. Che altro è l'espressione $l(1+i)^n = ni$, che la formola ordinaria della logaritmica $lx = y$, e siccome questa curva trascendente è fornita di infiniti rami due reali, e gli altri immaginarj, qual maraviglia c'è che allo stesso numero competa una moltitudine infinita ~~numero~~ di logaritmi?

Vengo al §XI. Egli è necessario che $2la = la + la$ si uguagli a $la^2$ poste le due condizioni, che all'uno, e all'altro $la$ si assegni lo stesso valore, e che l'unità si assuma per protonumero: Si osservino le due serie $1, a, a^2$ geometrica di numeri, $0, la, 2la$ aritmetica di logaritmi, ~~aritmetica di logaritmi~~, e chiaramente si scoprirà, essere $la^2 = 2la$ nelle mentovate due ipotesi. Non altrimenti ritenuto il protonumero $1$, ed attribuito a $la^2$ un costante valore, sarà $\frac{1}{2}la^2 = l\sqrt{a^2} = l\pm a$. Le due serie $1, \pm a, a^2$ ~~mettono~~ $0, \frac{1}{2}la^2, la^2$ mettono in chiaro una tal verità. Dice il Sig. Malandrelli, che siccome $\sqrt{-1}$ non è media proporzionale tra $-1$, e $-1$, quindi sarà falso che $2l\sqrt{-1}$ sia uguale a $l-1$. Ma ~~non vede~~ è pregare egli avvertirebbe, che cangia il protonumero $1$ in $-1$? Si serva, come

come ha sempre fatto il Sig.r Ab. Rossetti, dal protonumero 1, a gli si presenteranno le due progressioni $1, \sqrt{-1}, -1$ ~~una~~ geometrica di numeri $0, l\sqrt{-1}, 2l\sqrt{-1}$ aritmetica di logaritmi ~~numeri; e le altre aritmetica di logaritmi~~, che dimostrano $l-1 = 2l\sqrt{-1}$.

Afferma il Sig.r Ab. nel § XIII. che se in una logaritmica una semi-ordinata è positiva, tutte ed il protonumero ancora sarà positivo; se una è negativa, tutte ed il protonumero ancora sarà negativo; finalmente se una è immaginaria, tutte ed il protonumero saranno immaginarie. Ciò è vero verissimo, quando si parli del medesimo ramo della logistica, il quale non taglia mai l'assintoto come ottimamente osserva il Sig.r Ab. Ma e chi mi impedisce che in una serie geometrica di numeri ~~considerato~~ assunto sempre 1 come protonumero, io non possa prendere le semiordinate da diversi rami della stessa logistica? Si considerino le due serie di numeri, e di logaritmi

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$ nella pri-

$0, \frac{1}{4}p, \frac{2}{4}p, \frac{3}{4}p, p$ ......

ma della quali i numeri $1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$ ci sono somministrati da rami differenti della nostra curva

essendo geometrica la serie supe=
riore, aritmetica la inferiore, ed
essendo =0 il logaritmo del protonu=
mero =1, ed $\frac{1}{4}p$ proporzionale al logaritmo
di $\sqrt{-1}$, egli è fuori di dubbio, che
ne risultava $\frac{1}{2}p$ proporzionale a $l.-1$,
proporzionale a $\frac{l-\sqrt{-1}}{\frac{3}{4}p}$, $p$
proporzionale a $p$ $l$; e perchè
$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l-1 = \frac{1}{2}p$, e conseguentemente
$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l-1 = p$, sarà la semicirconfe=
renza al raggio, o sia la circonferenza
al Diametro come $\frac{1}{\sqrt{-1}}\, l-1 : 1$,
come $l-1 : \sqrt{-1}$, qualmente ha stabilito
l'incomparabile Sig.^r Bernoulli. La
premura che ho pel trovare della
verità alla verità mi ha fatto = A capo
riflettere Il Sig. Ab. Calandrelli, che
stabilito il protonumero $=1$, è parti=
mente protonumero non solo $-1$,
ma ancora $\pm\sqrt{-1}$, siccome medj pro=
porzionali fra 1, e $-1$: La serie prima delle infrascritte

$\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}$ &c.

$0$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$, $\frac{5}{4}p$ &c.

è geometrica, a cui sottoposta la
seconda sarà aritmetica. Il nulla
si riferisce a $\pm\sqrt{-1}$ come protonumero.
Dalla formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ si deduca
che posta la tangente $z=1$, onde
$u = \frac{1}{4}p$, abbiamo $\frac{1}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$, e
che per conseguenza l'arco $\frac{1}{4}p$ si ri=
ferisce al num.^ro $\sqrt{-1}$. Ora continuando

la

la serie aritmetica si raccoglie, che
al numero $\sqrt{-1}$ competono parimente
gli archi $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{3}{4}\rho$, $\rho$, $\frac{5}{4}\rho$ ec.
(ripetiti fra) dai quali le due serie relative al
protonumero 1)

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1, \sqrt{-1}$ ec.

$0, \frac{1}{4}\rho, \frac{1}{2}\rho, \frac{3}{4}\rho, \rho, \frac{5}{4}\rho$ ec.

si vede usati ~~infatto uso dei valori~~ $\frac{1}{4}\rho$, $\frac{5}{4}\rho$ ec. nell'aritmetica serie inferiore.

Similmente se nella formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ si stabilirà $z=-1$, alla qual tangente ci corrisponde l'arco $= \frac{3}{4}\rho$, sarà $u = \frac{3}{4}\rho = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l -\sqrt{-1}$. Al perchè a $-\sqrt{-1}$ si riferiva ~~ano~~ oltre l'arco nella serie a protonumero, anche l'arco $\frac{3}{4}\rho$, e per conseguenza anche gli altri notati nella serie aritmetica relativa alla serie $-\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ ec.

Fra questi archi si scelgono nella coppia di serie contrassegnate relative al protonumero $1$, $\frac{3}{4}\rho$, $\rho+\frac{3}{4}\rho$, $2\rho+\frac{3}{4}\rho$ ec.

~~Rimane~~ Rimane che io dica qualche cosa intorno al ~~nu~~ § XVII. Egli è certo essere

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{\frac{1}{2}dz}{1+z\sqrt{-1}} + \frac{\frac{1}{2}dz}{1-z\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}} + \frac{dz\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \left( l\, \overline{1+z\sqrt{-1}} - l\, \overline{1-z\sqrt{-1}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}.$$

Non si aggiunga costante; perchè fatta la tangente $z=0$ si trova

u

$u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \ldots = 0$, prendendosi l'unità come protonumero. ←

Il maneggio della formola $\frac{dz}{1+z^2}$ dipende dalle note regole dell'analisi, e non dovrebbe porsi in quistione, e intorno ad esso vanno di accordo li Ab. Lassuti ed il Co. Vincenzo mio fratello. Ho già notato, che quantunque i numeri in parte positivi, negativi, reali, e immaginarj non competano al medesimo ramo della logistica, possono nondimeno spettare a diversi rami, dai quali si prende in prestanza la soluzione del problema, che abbiam per le mani. Essendo la curva nostra fornita di infiniti rami, due reali, e gli altri immaginarj, i predetti numeri alla logaritmica stessa appartengono. L'integrale della formola $\frac{dz}{1+z^2}$ mi dà certamente tutti gli archi del circolo, il cui raggio $= 1$, cominciando dall'unità e terminando nell'infinito positivo e negativo: ma $\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \int \frac{dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}} + \frac{dz\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$; dunque quest'ultima espressione mi somministrerà tutti gli archi predetti; bastando per ottener ciò, che i numeri $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ sian contenuti nella totale estensione della logistica, curva trascendente.

Non posso mica concedere alle spiritosissimo Sig.r Ab. ch'egli usi la tangente z immaginaria. Il problema ha per scopo di determinare gli archi reali del circolo col mezzo delle tangenti z. Ora egli è indubitato, che alle tangenti immaginarie si riferiscono gli archi immaginari, e quindi il servirsene si oppone diametralmente al fine del proposto problema.

Queste sono le avvertenze più notabili

trascendente, che da una immensa moltitudine di rami è composta, ed ha di più la proprietà, che allo stesso numero infiniti logaritmi vi corrispondono.

notabili, che mi è riuscito di fare sopra l'ingegnosissimo Saggio Analitico del ch. Sig. Ab. Calandrelli. Si contengono in esso delle ottime riflessioni, fra le quali si distinguono quelle, in cui nota le circostanze, che richiedono il protonumero, affermativo, o negativo, reale, o immaginario, e la suttangente reale, o immaginaria, nei diversi rami della stessa logistica. Io certamente me gli professo sommamente obbligato per aver intrapresa la difesa di mio fratello; ma temo che in alcuni punti abbia da incontrare delle valide opposizioni per parte del Sig. Ab. Rassuti

Aggiunta di Annotazioni
al Saggio Analitico
dal Sig. Abate
Giuseppe Calandrelli

Aggiunta di Annotazioni al
Saggio Analitico del Sig. Ab.
Giuseppe Calandrelli

Ho detto nella prima Annotazione, che quantunque $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}$ non competano allo stesso ramo della logistica, spettano nulladimeno a diversi rami della medesima; ed attesa la proprietà, che ad un numero convengono infiniti logaritmi, alla premessa serie geometrica di numeri si adatta la serie aritmetica $0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p$ di archi circolari, che sono proporzionali ai logaritmi di essi numeri. Questa verità si vuol mettere in tutto il suo lume. Assunto 1 come protonumero, sono altresì tali non solo $-1$, come chiaramente si raccoglie dalla quadratura dell'iperbola fra gli assintoti, ma ancora $\pm\sqrt{-1}$, che sono medj proporzionali fra 1 e $-1$. Al protonumero $+1$ corrispondono gli archi $0, p$ la cui tangente $= 0$.+ Avremo dunque

$-1, -1$ numeri

$0, p$ logaritmi. Ma $-1$ è medio geometrico fra $-1, -1$, $\frac{1}{2}p$ è medio aritmetico fra $0, p$; dunque ci si presenteranno le due serie

$-1, -1, -1$ geometrica di numeri

$0, \frac{1}{2}p, p$ aritmetica ~~analoga~~ analoga ai logaritmi, e perciò a $-1$ può rettamente l'arco $\frac{1}{2}p$ riferirsi.

Non altrimenti spettando al protonumero $\pm\sqrt{-1}$ gli archi $0, p$; prese fra $\pm\sqrt{-1}$ ~~un media continua~~ e $\pm\sqrt{-1}$ tra medie continue proporzionali geometriche

+Mi pongo sotto gli occhi due unità, e se a ciascuna di esse ci adatto il logaritmo $= 0$, anche a $-1$ medio geometrico fra 1 ed 1 si riterrà il logaritmo $= 0$ medio aritmetico fra due nulla, onde ci si presentino le due serie $1, -1, 1$ / $0, 0, 0$ che dimostrano $-1$ protonumero. Ma se alla prima unità ci applico il logaritmo $= 0$, ed alla seconda il logaritmo proporzionale a $p$, al medio geometrico $-1$ competerà l'arco $\frac{1}{2}p$ medio aritmetico fra $0$, e $p$ e ne risulteranno le serie $1, -1, 1$ / $0, \frac{1}{2}p, p$

Non altrimenti assegnando alle due unità il logaritmo = 0, posta tra esse tre medie continue proporzionali geometriche, e fra i due nulla altrettante medie aritmetiche avremo la serie

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$

$0, 0, 0, 0, 0;$

da cui raccoglieremo essere $\pm\sqrt{-1}$ protonumeri: che se la prima unità riceverà il logaritmo = 0, e la seconda il 1^mo log. proporzionale B a $p$, ne proverranno le due progressioni relative

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$

$0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p, p.$

metriche, e fra 0, $p$, tre medie continue proporzionali aritmetiche, scopriremo le due serie relative

$\pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}$

$0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p, p$

dalle quali impareremo, che al numero $\sqrt{-1}$ giustamente si addatta l'arco $\frac{1}{4}p$, ed al numero $-\sqrt{-1}$ l'arco $\frac{3}{4}p$, e che per conseguenza alla medesima logaritmica appartengono le due progressioni

$1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$ &c

$0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p, p$ &c

Un secondo esempio farà vie più conoscere l'immensità del grado della nostra curva. Egli è facile a dimostrarsi, che nel circolo del raggio = 1 la tangente dell'arco $\frac{1}{6}p$ si agguaglia ad $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nella formola $\frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = u$ si sostituisca $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in cambio di $z$, $\frac{1}{6}p$ in cambio di $u$, onde si abbia $\frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{6}p$, e ci si presentino i principj delle due serie

$1, \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$ geometrica

$0, \frac{1}{6}p$ aritmetica

le quali si continueranno nel modo seguente

$1, \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}, \left(\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^3, \left(\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^4$ &c

$0, \frac{1}{6}p, \frac{1}{3}p, \frac{1}{2}p, \frac{4}{6}p$ &c.

o sia effettuando i computi

2 A $\quad 1, \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}, \frac{\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{1}{3}}}, -1, \frac{\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{1}{3}}}, \frac{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}, 1$ &c

2 B $\quad 0, \frac{1}{6}p, \frac{1}{3}p, \frac{1}{2}p, \frac{4}{6}p, \frac{5}{6}p, p$ &c

essendosi

essendosi fra 1, ed e prese cinque medie continue proporzionali geometriche, e ciascuna di esse compete la prerogativa di protonumero; ~~Quindi~~ principiando dalla prima $\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$, converranno ad essa gli archi $0$, $\rho$. Prese fra $\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$, $\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$ cinque medie geometriche, e fra $0$, e $\rho$ cinque medie aritmetiche, ci si presentavanno le due serie

$$\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$$

$$0,\ \tfrac{1}{6}\rho,\ \tfrac{1}{3}\rho,\ \tfrac{1}{2}\rho,\ \tfrac{2}{3}\rho,\ \tfrac{5}{6}\rho,\ \rho$$

le quali ci manifestano, che al numero $\frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}$ veramente si accomoda l'arco $\frac{1}{6}\rho$.

Replicando il discorso in riguardo agli altri numeri contenuti nella serie A, ci accorgeremo, che con ragione ad essi si appropriano gli archi espressi nella serie B, e che parimenti alla stessa logistica spettano le mentovate due progressioni.

imperciocchè adattandosi alla due unità il logaritmo $= 0$; ci si presentano le due serie

$$1,\ \frac{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ -1,\ \frac{\frac{1}{3}-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}+\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{1-\sqrt{-\frac{1}{3}}}{1+\sqrt{-\frac{1}{3}}},\ 1$$

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$$

che ci rendono manifesto, che ad ognuna delle cinque medie geometriche ~~compete la prerogativa di protonumero~~ conviene il logaritmo $= 0$.

Aggiunga un terzo esempio, che ci somministrerà nuovi e più composti protonumeri. Circoscrivendo un pentagono al circolo del raggio $=1$, la tangente dell'arco $\frac{1}{5}\rho$ si determina $= \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ^. Nella formula

^ metà del lato del pentagono circoscritto

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = u \text{ pongo } z = \sqrt{5-2\sqrt{5}},$$

$u = \frac{1}{5}\rho$, ed ho ~~[illegible]~~

~~Nascerebbero pertanto le due serie geometrica, ed aritmetica~~

$$1,\ \frac{\sqrt{4}+5-\sqrt{5}\sqrt{-1}}{\sqrt{4}-5+\sqrt{5}\sqrt{-1}},\ \left(\frac{\sqrt{4}+5-\sqrt{5}\sqrt{-1}}{\sqrt{4}-5+\sqrt{5}\sqrt{-1}}\right)^2 \text{ \&c. } \left(\frac{\sqrt{4}+5-\sqrt{5}\sqrt{-1}}{\sqrt{4}-5+\sqrt{5}\sqrt{-1}}\right)^5 = 1$$

$$0,\ \tfrac{1}{5}\rho,\ \tfrac{2}{5}\rho\ \text{~~\&c.~~}\ \rho$$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}} = \frac{1}{5}p$. Ne nascevano partanto le due seguenti serie, geometrica, ed aritmetica

$$1,\ \frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}},\ \left(\frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}\right)^2,\ \left(\frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}\right)^3 \&c. \left(\frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}\right)^5 = 1$$

$$0,\ \tfrac{1}{5}p,\ \tfrac{2}{5}p,\ \tfrac{3}{5}p\ \&c.\ p$$

e facendo le necessarie operazioni

$$3A \quad 1,\ \frac{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}},\ \frac{-2+\sqrt5+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{-2+\sqrt5-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}},\ \frac{-7+3\sqrt5+\sqrt5-1\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{-7+3\sqrt5-\sqrt5+1\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}$$

$$3B \quad 0,\ \tfrac{1}{5}p,\ \tfrac{2}{5}p,\ \tfrac{3}{5}p$$

$$\frac{2-\sqrt5+\sqrt5-2\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{2-\sqrt5-\sqrt5+2\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}},\ \frac{20-9\sqrt5}{20-9\sqrt5}=1$$

$$\tfrac{4}{5}p,\ p$$

$\wedge = \frac{\sqrt{-2+\sqrt5}+\sqrt5\sqrt{-1}}{\sqrt{-2+\sqrt5}-\sqrt5\sqrt{-1}}$

$+ = \frac{-1+\sqrt5\sqrt5\sqrt{-1}-4\sqrt{-2+\sqrt5}}{1-\sqrt5\sqrt5\sqrt{-1}-4\sqrt{-2+\sqrt5}}$

$\ast = \frac{1-\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}{1+\sqrt{5-2\sqrt5}\,\sqrt{-1}}$

Nella serie 3A fra 1, ed 1 si sono frapposte quattro medie continue proporzionali geometriche, alle quali tutte compete la prerogativa di protonumeri; ϕ ~~Il perchè ad ognuna~~ di esse corrisponderanno gli archi 0, p, e prendendo fra due protonumeri eguali quattro medie geometriche, e fra 0, p altrettante medie aritmetiche, si scoprirà che a qualunque dei nostri protonumeri possono riferirsi gli archi 0, $\frac{1}{5}p$, $\frac{2}{5}p$, $\frac{3}{5}p$, $\frac{4}{5}p$, p, e che con ragione alla serie 3A si adatta la serie 3B.

ϕ perchè applicato alle due unità il logaritmo = 0, a ciascuna delle quattro medie geometriche conviene il medesimo logaritmo.

Chi dividesse il semicircolo in parti 7, 8, 9, 10, 11, 12 &c. troverebbe, singolarmente quando è primo il numero dividente, protonumeri

sempre

sempre più composti. Se il numero dividente non è primo, i protonumeri giungono nuovi soltanto in parte. Mi serva di esempio la divisione in otto parti, la quale si ottiene facilmente col mezzo dello scompartimento in quattro membri, ed è la seguente

$$1,\ +\sqrt[4]{-1},\ \sqrt{-1},\ +\sqrt[4]{-1}\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt[4]{-1},\ -\sqrt{-1},\ -\sqrt[4]{-1}\sqrt{-1},\ 1$$
$$0,\ \tfrac{1}{8}p,\ \tfrac{1}{4}p,\ \tfrac{3}{8}p,\ \tfrac{1}{2}p,\ \tfrac{5}{8}p,\ \tfrac{3}{4}p,\ \tfrac{7}{8}p,\ p$$

I protonumeri $-1$ $\pm\sqrt{-1}$ ci sono somministrati dalla divisione del semicircolo in quattro parti, e i nuovamente introdotti sono $\pm\sqrt[4]{-1}$, $\pm\sqrt{-\sqrt{-1}} = \pm\sqrt[4]{-1}\sqrt{-1}$

Avendo l'arco $\frac{1}{8}p$ la tangente $z = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$, se sostituiamo questo valore nella formola $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = u$, ne nascerà $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\,\ell\,\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{8}p$. Alzando $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}$ alla potestà 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ne proverrà una serie geometrica, a cui corrisponderà la sottoposta serie aritmetica

$$1,\ \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}},\ \left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}\right)^2 \text{\&c.}\ \left(\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}\right)^8 = 1$$
$$0,\ \tfrac{1}{8}p,\ \tfrac{1}{4}p\ \text{\&c.}\ p$$

Effettuando le operazioni indicate scopriremo

$2\,\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} =$ $\qquad 2 = \frac{\sqrt{2}+2\sqrt{-1}+\sqrt{2}\sqrt{-1}}{\sqrt{2}-2\sqrt{-1}-\sqrt{2}\sqrt{-1}} =$

$$1,\ \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{-1},\ \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}+\sqrt{-2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}} = \sqrt{-1},\ \frac{2+\sqrt{2}+4\sqrt{-1}+3\sqrt{-2}}{2+\sqrt{2}-4\sqrt{-1}-3\sqrt{-2}} = \sqrt[4]{-1}\sqrt{-1}$$
$$0,\quad \tfrac{1}{8}p,\quad \tfrac{1}{4}p,\quad \tfrac{3}{8}p,$$

$$\frac{12\sqrt{-1}+4\sqrt{-2}}{-12\sqrt{-1}-4\sqrt{-2}} = -1,\ \frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = -\sqrt[4]{-1},\ \frac{-1-\sqrt{2}-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}} = -\sqrt{-1}$$
$$\tfrac{1}{2}p,\quad \tfrac{5}{8}p,\quad \tfrac{3}{4}p,$$

$$\frac{-2-\sqrt{2}-4\sqrt{-1}-3\sqrt{-2}}{2+\sqrt{2}-4\sqrt{-1}-3\sqrt{-2}} = -\sqrt[4]{-1}\sqrt{-1},\ \frac{-3\sqrt{-1}-2\sqrt{-2}}{-3\sqrt{-1}-2\sqrt{-2}} = 1$$
$$\tfrac{7}{8}p,\quad p$$

Il Sig.r Ab. Bessuzzi si è dato vanto di aver osservato essere $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, anche e qui si scopre $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}+\sqrt{-2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}-\sqrt{-2}} =$

$$\frac{\overline{1+\sqrt{2}}\cdot\overline{1+\sqrt{-1}}}{\overline{1+\sqrt{2}}\cdot\overline{1-\sqrt{-1}}} = \sqrt{-1}$$ : si renda inoltre

manifesto essere $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \sqrt[4]{-1}$,

$$\frac{2+\sqrt{2}+4\sqrt{-1}+3\sqrt{-2}}{2+\sqrt{2}-4\sqrt{-1}-3\sqrt{-2}} = \sqrt[4]{-1}\sqrt{-1}.$$

Ad ogni protonumero $\pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt[4]{-1}$, $\pm\sqrt[4]{-1}\sqrt{-1}$ possono riferirsi gli archi $0$, $\frac{1}{8}\rho$, $\frac{1}{4}\rho$, $\frac{3}{8}\rho$, $\frac{1}{2}\rho$, $\frac{5}{8}\rho$, $\frac{3}{4}\rho$, $\frac{7}{8}\rho$, $\rho$; uno dei quali si è loro rettamente adattato nelle progressioni 4A, 4B.

Ognuna delle sette medie geometriche è protonumero, perchè anche ad essa compete il logaritmo $= 0$ supposto che ad ambe le unità lo stesso logaritmo $0$ si adatti

Do termine a queste annotazioni proponendo un metodo, col mezzo del quale si possono determinare le tangenti delle parti ~~aliquote~~ del semicircolo. La quantità $\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$ si alzi ordinatamente alle

$0,\ \frac{\rho}{n},\ \frac{2\rho}{n}$ &c. $\frac{n\rho}{n} = \rho$

potestà 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. n e ne nascerà la serie

$$\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}},\ \left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{1+2\cdot 2\sqrt{-1}-2^2}{1-2\cdot 2\sqrt{-1}-2^2}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{1+3\cdot 2\sqrt{-1}-3\cdot 2^2-2^3\sqrt{-1}}{1-3\cdot 2\sqrt{-1}-3\cdot 2^2+2^3\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{1+4\cdot 2\sqrt{-1}-6\cdot 2^2-4\cdot 2^3\sqrt{-1}+2^4}{1-4\cdot 2\sqrt{-1}-6\cdot 2^2+4\cdot 2^3\sqrt{-1}+2^4}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^5 = \frac{1+5\cdot 2\sqrt{-1}-10\cdot 2^2-10\cdot 2^3\sqrt{-1}+5\cdot 2^4+2^5\sqrt{-1}}{1-5\cdot 2\sqrt{-1}-10\cdot 2^2+10\cdot 2^3\sqrt{-1}+5\cdot 2^4-2^5\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^6 = \frac{1+6\cdot 2\sqrt{-1}-15\cdot 2^2-20\cdot 2^3\sqrt{-1}+15\cdot 2^4+6\cdot 2^5\sqrt{-1}-2^6}{1-6\cdot 2\sqrt{-1}-15\cdot 2^2+20\cdot 2^3\sqrt{-1}+15\cdot 2^4-6\cdot 2^5\sqrt{-1}-2^6}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^7 = \frac{1+7z\sqrt{-1}-21z^2-35z^3\sqrt{-1}+35z^4+21z^5\sqrt{-1}-7z^6-z^7\sqrt{-1}}{1-7z\sqrt{-1}-21z^2+35z^3\sqrt{-1}+35z^4-21z^5\sqrt{-1}-7z^6+z^7\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^8 = \frac{1+8z\sqrt{-1}-28z^2-56z^3\sqrt{-1}+70z^4+56z^5\sqrt{-1}-28z^6-8z^7\sqrt{-1}+z^8}{1-8z\sqrt{-1}-28z^2+56z^3\sqrt{-1}+70z^4-56z^5\sqrt{-1}-28z^6+8z^7\sqrt{-1}+z^8}$$

&c. Se il semicircolo $p$ non si divide, esser dee $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = 1$, e quindi $1+z\sqrt{-1} = 1-z\sqrt{-1}$, $2z\sqrt{-1}=0$, o sia $z=0$, che è quanto a dire la tangente del semicircolo $=0$.

Il semicircolo diviso in due parti mi dà $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{1+2z\sqrt{-1}-z^2}{1-2z\sqrt{-1}-z^2} = 1$, e per conseguenza $1+2z\sqrt{-1}-z^2 = 1-2z\sqrt{-1}-z^2$. Questa equazione ha due radici $z=0$, $z=\infty$, l'ultima delle quali ~~soltanto~~ serve per l'arco $\frac{1}{2}p$, ~~al presente problema~~ e la prima per gli archi $=\begin{cases}0\\p\end{cases}$

Si partisca il semicircolo in tre parti, e si troverà $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{1+3z\sqrt{-1}-3z^2-z^3\sqrt{-1}}{1-3z\sqrt{-1}-3z^2+z^3\sqrt{-1}} = 1$ e perciò $1+3z\sqrt{-1}-3z^2-z^3\sqrt{-1} = 1-3z\sqrt{-1}-3z^2+z^3\sqrt{-1}$, e cancellate le quantità, che si distruggono $3z\sqrt{-1}-z^3\sqrt{-1} = -3z\sqrt{-1}+z^3\sqrt{-1}$, il che mi dà $z=0$; dalla qual formula divisa per $z\sqrt{-1}$, si deduce $z^2=3$, e conseguentemente $z=\pm\sqrt{3}$, ed in fatti $\sqrt{3}$ è la tangente dell'arco $=\frac{1}{3}p$, $-\sqrt{3}$ la tangente dell'arco $\frac{2}{3}p$, e $z=0$ la tangente degli archi $=\begin{cases}0\\p\end{cases}$.

Dividendo il semicircolo in quattro parti, dovrà essere $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{1+4z\sqrt{-1}-6z^2-4z^3\sqrt{-1}+z^4}{1-4z\sqrt{-1}-6z^2+4z^3\sqrt{-1}+z^4} = 1$; equazione, da cui si raccoglie * $4z^3\sqrt{-1} = 4z\sqrt{-1}$, e dividendo per $4z\sqrt{-1}$, $z^2=1$, e quindi $z=\pm 1$, che sono le tangenti degli archi $\frac{1}{4}p$, $\frac{3}{4}p$; e la tangente $z=\infty$ compete all'arco $=\frac{1}{2}p$, e la tang. $=0$ agli archi $0$, e $p$. Passiamo alla divisione del semicircolo in cinque parti, che determina $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^5$

> * $1+4z\sqrt{-1}-6z^2-4z^3\sqrt{-1}+z^4 = 1-4z\sqrt{-1}-6z^2+4z^3\sqrt{-1}+z^4$, che dimostra poter esser $z=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$. Ma quando $z$ non è quantità infinita, avremo

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^5 = \frac{1+5z\sqrt{-1}-10z^2-10z^3\sqrt{-1}+5z^4+z^5\sqrt{-1}}{1-5z\sqrt{-1}-10z^2+10z^3\sqrt{-1}+5z^4-z^5\sqrt{-1}}$$

$= 1$, e quindi $10z\sqrt{-1}-20z^3\sqrt{-1}+2z^5\sqrt{-1} = 0$, e perciò ⁿ $z^4-10z^2+5=0$. Supplendo il quadrato si troverà $z^4-10z^2+25 = 20$, ed estraendo la radice $z^2-5 = \pm\sqrt{20}$, o sia $z^2 = 5\pm\sqrt{20}$, e finalmente * $z = \pm\sqrt{5\pm\sqrt{20}} = \pm\sqrt{5\pm2\sqrt{5}}$. * ~~Dalla equazione $z^4-10z^2+25=20$ potrebbe anche dedursi $z^2-5=\pm 2\sqrt{5}$ [illegible], ma questa radice non si conviene al problema, che abbiamo per le mani.~~

ⁿ dividendo per $2z\sqrt{-1}$, onde si abbia la radice $z=0$, $2^a$ &c.

* La radice $z=0$ serve per gli archi $=\begin{cases}0\\p\end{cases}$, e le radici in serie $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$, $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{5+2\sqrt{5}}$, $-\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ esprimono le tangenti degli archi $\frac{1}{5}p$, $\frac{2}{5}p$, $\frac{3}{5}p$, $\frac{4}{5}p$.

Partito in sei porzioni eguali il semicircolo, avremo $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^6 =$

$$\frac{1+6z\sqrt{-1}-15z^2-20z^3\sqrt{-1}+15z^4+6z^5\sqrt{-1}-z^6}{1-6z\sqrt{-1}-15z^2+20z^3\sqrt{-1}+15z^4-6z^5\sqrt{-1}-z^6}$$

$= 1$, e ne raccolgo $+12z\sqrt{-1}-40z^3\sqrt{-1}+12z^5\sqrt{-1} = 0$, e per conseguenza $z^4-\frac{10}{3}z^2+1=0$, ed aggiungendo $\frac{16}{9}$ da entrambe le parti, $z^4-\frac{10}{3}z^2+\frac{25}{9}=\frac{16}{9}$, ed estraendo la radice, $z^2-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$, e perciò $z^2=\begin{cases}3\\ \frac{1}{3}\end{cases}$, e $\pm z = \begin{cases}\sqrt{3}\\ \sqrt{\frac{1}{3}}\end{cases}$ ⊕ ~~[illegible] è quella radice, che si disfà della divisione del semicircolo in sei parti.~~

\+ primieramente $z=\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$, ed indi

⊕ Registro qui sotto la serie degli archi e delle tangenti che loro convengono.

Archi $0$, $\frac{1}{6}p$, $\frac{1}{3}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{2}{3}p$, $\frac{5}{6}p$, $p$
Tang.ᵗⁱ $0$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{3}$, $\infty$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{1}{3}}$, $0$.

Lo scompartimento del semicircolo in sette parti determina $7z\sqrt{-1}-35z^3\sqrt{-1}+21z^5\sqrt{-1}-z^7\sqrt{-1} = -7z\sqrt{-1}+35z^3\sqrt{-1}-21z^5\sqrt{-1}+z^7\sqrt{-1}$, e conseguentemente ⁿ $z^6-21z^4+35z^2-7=0$. ~~[illegible]~~ Col mezzo

ⁿ dividendo per $z$, onde si abbia $z=0$,

dalla

della costruzione geometrica si tro= veranno i sei valori di z, ~~i quali~~ che uniti a z = 0 ~~rappresentanti, uno positivo e l'altro ne= gativo~~ pareggiano la tangente degli archi $\frac{1}{7}p$, $\frac{2}{7}p$, $\frac{3}{7}p$, $\frac{4}{7}p$, $\frac{5}{7}p$, $\frac{6}{7}p$, $p$ ~~settima parte del semicircolo~~. Volen= do svolgere analiticamente la scoper= ta equazione, s'incontra il caso irre= ducibile, il che ora basti d'avere sem= plicemente accennato.

Mi inoltro alla divisione del semicircolo in otto parti, che richiede

$(1+z\sqrt{-1})^8$: $1+8z\sqrt{-1}-28z^2-56z^3\sqrt{-1}+70z^4+56z^5\sqrt{-1}-28z^6-8z^7\sqrt{-1}+z^8 = 1-8z\sqrt{-1}-28z^2+56z^3\sqrt{-1}+70z^4-56z^5\sqrt{-1}-28z^6+8z^7\sqrt{-1}+z^8$, formola, da cui im= paro ~~poter essere~~ due valori di $z = \begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$. Cancellati i termini, che si elidono, scopro $8z^6$ &c*

* $8z^6-56z^4+56z^2-8=0$, o sia $z^6-7z^4+7z^2-1=0$. Agevolmente ci accorgeremo poter essere $z^2=1$, ovvero $z^2-1=0$, ($z=\pm1$) e Dividendo la for= mola per $z^2-1$, troveremo $z^4-6z^2+1=0$, e perfezionando il quadrato, $z^4-6z^2+9=8$, ed estra= endo la radice, $z^2-3=\pm2\sqrt{2}$, e perciò $z^2=3\pm2\sqrt{2}=2\pm2\sqrt{2}+1$, e di nuovo estraendo la radice, $\pm z=\sqrt{2}\pm1$ # ~~La tangente della settima parte del semicircolo rappresentando il valore = ...~~. Di sopra ho asserito essere $z=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ quando l'arco $=\frac{1}{8}p$, grandez= za, che si accorda colla testé scoperta. In fatti moltiplicando e dividendo per $\sqrt{2}-1$, avremo $z=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1\cdot\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}-1$.

\# Veggansi le due serie degli archi, e delle relative tangenti

| | | | |
|---|---|---|---|
| Archi | $0$ | $\frac{1}{8}p$ | $\frac{1}{4}p$ |
| Tang. | $0$ | $\sqrt{2}-1$ | $1$ |
| | $\frac{3}{8}p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{5}{8}p$ |
| | $\sqrt{2}+1$ | $\infty$ | $-\sqrt{2}-1$ |
| | $\frac{3}{4}p$ | $\frac{7}{8}p$ | $p$ |
| | $-1$ | $-\sqrt{2}+1$ | $0$ |

Se si fosse usato il valore $z=\sqrt{2}-1$, si sarebbe scoperto

$$\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}=\frac{1+\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1},$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}-1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{2}-1\cdot 1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}-1\cdot 1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1},$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{2+\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{-1}-1}{\sqrt{2}-\sqrt{-1}-1} = \sqrt[4]{-1\sqrt{-1}},$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{3-2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{-1}}{3-2\sqrt{2}\cdot -2\sqrt{-1}} = -1$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^5 = \frac{-1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{-1}+\sqrt{2}-1}{\sqrt{-1}+\sqrt{2}-1} = -\sqrt[4]{-1}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^6 = \frac{-7+5\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{-1}\cdot 1+\sqrt{-1}}{-7+5\sqrt{2}\cdot -2\sqrt{-1}\cdot 1-\sqrt{-1}} = \frac{-1-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^7 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{-1}+1}{\sqrt{2}-\sqrt{-1}-1} = -\sqrt[4]{-1\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)^8 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{-1}+1\cdot 1+\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}-\sqrt{-1}-1\cdot 1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}} = \frac{-4\sqrt{-1}+2\sqrt{2}}{-4\sqrt{-1}+2\sqrt{2}}$$

$= 1$

Osservi chi legge le diverse espressioni della stessa quantità, e specialmente di $\sqrt[4]{-1} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{-1}}{1-\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}}$, e di $\sqrt[4]{-1\sqrt{-1}} = \frac{1+\sqrt{2}\sqrt{-1}+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{2}\sqrt{-1}-\sqrt{-1}} = \frac{-1+\sqrt{2}+\sqrt{-1}}{-1+\sqrt{2}-\sqrt{-1}}$.

Concludo col replicare, che quantunque i numeri reali, immaginarj, positivi, e negativi non appartengano al medesimo ramo della logistica, basta che spettino a rami diversi, acciocchè si possano rettamente introdurre in una serie geometrica. Lo stesso dicasi dei logaritmi, essendo sufficiente il provare, che qual tal logaritmo possa corrispondere a qual tal numero, onde mi sia lecito di introdurlo nella aritmetica progressione.

Sig. Conte Pietro Riva[illegible]

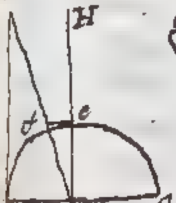
315

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo

307

[G]ratissime mi sono state le riflessioni quali il Chiarissimo Sig. Conte si è degnato di fare su diverse parti del mio saggio. Nel ringraziarla adunque di tanta attenzione e cortesia, mi do l'onore assoggettare al suo saggio discernimento questi miei qualunque siano pensieri.

L'equazione $1 = \frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ si dimostra impossibile al § IV non perchè multiplicando e dividendo per $z - a\sqrt{-1}$, e risultandone $z^2 + a^2 = z^2 - a^2 - 2az\sqrt{-1}$, sia $2a^2 + 2az\sqrt{-1} = 0$, o vero una quantità infinita eguale a nulla; ma bensì perchè dall'equazione $z^2 + a^2 = z^2 - a^2 - 2az\sqrt{-1}$ si deduce $2a^2 = 2az\sqrt{-1}$, e però $a = z\sqrt{-1}$; cioè una quantità finita eguale ad una immaginaria. Se si prende una formola $\frac{z-a}{z+a}$, e $z$ si fa infinita rispetto alla quantità $a$ sarà $\frac{z-a}{z+a} = 1$; e di nuovo multiplicando per $(z-a)$ sarà $1 = \frac{z^2-a^2}{z^2-2az+a^2}$; onde $z^2 - a^2 = z^2 - 2az + a^2$. Questa equazione è vera in quanto che $z$ si pone infinita; onde malamente raziocinarebbe chi dall'equazione $z^2 - a^2 = z^2 - 2az + a^2$ deducesse $-a^2 = -2az + a^2$, onde $2a^2 = 2az$, ed $a = z$. Dico raziocinarebbe malamente, mentre l'equazione $z^2 - a^2 = z^2 - 2az + a^2$ è vera, fatta supposizione di $z$ infinita, onde sottraendo di quà e di là $z^2$, l'equazione residua deve essere impossibile, non avendosi più riguardo alla condizione nella quale unicamente era vera; cioè non avendosi più riguardo a $z^2$ qual $z^2$ rendeva vera l'equazione. Non sarebbe adunque assurdo alcuno nell'equazione $z^2 + a^2 = z^2 - a^2 - 2az\sqrt{-1}$ che si trovasse una quantità finita come $a$ eguale ad una infinita quantità, non avendosi riguardo alla quantità $z^2$: l'assurdo però è che si trovi $a$ reale, eguale ad $z$ infinita, e nel tempo istesso immaginaria. Questo assurdo si puole rilevare dalla stessa equazione $z^2 + a^2 = z^2 - a^2 - 2az\sqrt{-1}$ nella quale il primo membro $z^2 + a^2$ è reale, il secondo poi immaginario, benchè si ponga piccolo quanto uno vuole il termine $2az\sqrt{-1}$. Supposta la sua costruzione dice ottimamente dovere essere $fe = 0 : Ce = 1 = CA = a : AG = z$; e però $z = \frac{a}{0}$.



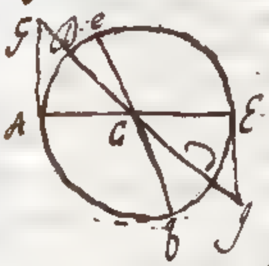
Questo valore sostituito nella formola $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ trova $\frac{\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0} + a\sqrt{-1}}$; quindi vuole $\frac{\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0} + a\sqrt{-1}} = \frac{1 - 0\sqrt{-1}}{1 + 0\sqrt{-1}}$. Si rifletta però che $\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}$ è $= \frac{a - 0a\sqrt{-1}}{0}$, ed $\frac{a}{0} + a\sqrt{-1} = \frac{a + 0 \cdot a\sqrt{-1}}{0}$ dunque dividendo $\frac{a - 0 \cdot a\sqrt{-1}}{0}$ per $\frac{a + 0a\sqrt{-1}}{0}$ sarà $\frac{0 \cdot a - 0 \cdot 0 \cdot a\sqrt{-1}}{0 \cdot a + 0 \cdot 0 \cdot a\sqrt{-1}} = \frac{0}{0} = 0$. Non si puole adunque supporre $\frac{\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0} + a\sqrt{-1}} = \frac{1 - 0\sqrt{-1}}{1 + 0\sqrt{-1}} = 1$; se non si supponga $\frac{0 \cdot a}{0 \cdot a} = 1$; il che è lo stesso $\frac{0}{0} = 1$; il che evidentemente si puole dimostrare falso. Di fatti $\frac{0}{0} = \frac{0}{1-1} = 0 + 0 + 0 + 0$ etc. Per supporre adunque che $\frac{0}{0}$ sia eguale all'unità, bisogna supporre, che una infinità di zeri, possano fare l'unità; cosa, che sarà aliena dal sentimento di Grandi, e di Leibnitz ancora, i quali (benchè naz[illegible]

lamente) hanno creduto, che una infinità di zeri eguagliassero $\frac{1}{n}$. Ma di più nella proporzione $fe = 0 : ce = 1 = cA = a : HG = z$, si puole domandare se per $0$ si intenda il zero assoluto, mentre in questo caso la proporzione $0:1 = a:z$ non sussiste dimostrandosi da questa $0 \cdot z = a = 0$. Se poi per zero si intenda zero relativo in questo caso $\frac{\frac{a}{0} - a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0} + a\sqrt{-1}} = \frac{a - 0 \cdot a\sqrt{-1}}{a + 0 \cdot a\sqrt{-1}}$ non sarà eguale all' unità, mentre $-0 \cdot a\sqrt{-1}$, che $+0 \cdot a\sqrt{-1}$ saranno quantità quanto uno vuole piccole, ma non mai assoluti zeri. Ma per dimostrare più evidentemente l' impossibilità dell' equazione $1 = \frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$; si prenda altra equazione $1 = \frac{na + a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}}$. È certo esser $1 = \frac{na + a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}} = \frac{na}{na + a\sqrt{-1}} + \frac{a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}}$; essendo però $\frac{na}{na + a\sqrt{-1}} = 1 - \frac{\sqrt{-1}}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{\sqrt{-1}}{n^3} + \frac{1}{n^4} -$ &c. ed $\frac{a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{-1}}{n^3} - \frac{1}{n^4} +$ &c. è chiaro che fatto anche infinito il numero $n$ la frazione $\frac{na}{na + a\sqrt{-1}}$ sarà sempre immaginaria, se al suo valore non si aggiunga il valore della frazione $\frac{a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}}$; fatta la qual somma il valore della frazione $\frac{na + a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}}$ si trova realmente eguale all' unità. Se dunque fatta $n$ infinita il valore della frazione $\frac{na}{na + a\sqrt{-1}}$ è immaginario se non le si aggiunga altro valore immaginario della frazione $\frac{a\sqrt{-1}}{na + a\sqrt{-1}}$, fatta $z$ infinita, quale equivalerà ad $na$, il valore della frazione $\frac{z}{z + a\sqrt{-1}}$ sarà immaginario, se non le si aggiunga altro valore immaginario di $\frac{a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$; ma nel nostro caso essendo la frazione $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}} = \frac{z}{z + a\sqrt{-1}} - \frac{a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ non solo non si aggiunge il valore immaginario della frazione $\frac{a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$; ma anzi si sottrae, dunque cresce il motivo per il quale dobbiamo dire essere il valore della frazione $\frac{z - a\sqrt{-1}}{z + a\sqrt{-1}}$ immaginario, benchè $z$ sia infinita rispetto all' $a$.

Passo ora alle riflessioni fatte sul paragrafo V. Concesso che la periferia si esprima per $\frac{4}{\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$ qualora si riferisca al ramo della Logaritmica nella quale tutte le semiordinate devono essere immaginarie. Accordando al Sig. [illegible] che $\frac{4}{\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$ sia $= \frac{2}{\sqrt{-1}} l{-1}$, allora si riferisce la periferia al ramo della Logaritmica, nella quale tutte le semiordinate sono negative; quando finalmente la periferia si esprima per $\frac{1}{\sqrt{-1}} l1$, allora si riferirà alla Logaritmica ordinaria nella quale tutte le semiordinate sono positive; onde non potendo da questo ramo $\frac{1}{n} l1$ non da luogo a dubitare se possa essere $= l{-1}$; non essendo semiordinata alcuna in questo ramo quale non sia positiva; anzi prescindendo dall' opinione che i Logaritmi delle quantità negative siano eguali ai logaritmi delle quantità positive $\frac{1}{n} l{-1}$ sarà sicuramente eguale a $l1$; mentre nel ramo delle semiordinate negative il protonumero negativo $-1 : -\sqrt{1} = -\sqrt{1} : -1$. Che se mi si dica tra uno e uno non solo essere media proporzionale $\sqrt{1}$ ma anche $-\sqrt{1}$, dirò ancora potersi fondatamente dubitare della proporzione $1:-1 = -1:1$. Nel paragrafo XIII propongo una serie di termini positivi e negativi, quale dico serie geometrica, tengo però, che queste tali serie sono geometriche in apparenza. È certo che nella proporzione $1:-1 = -1:1$ il prodotto degli estremi è sempre eguale al prodotto dei medii: ma la natura della proporzione ricerca la somiglianza delle ragioni; or secondo le comuni idee un

quantità negativa è minore di qualunque positiva, essendo adunque $1:-1 = -1:1$
una proporzione, bisognerà, che il maggiore al minore costituisca una
simile ragione a quella che ha il minore al maggiore. Quando adunque
la periferia si riferisca alla Logaritmica ordinaria sarà sempre vero che
la periferia sia al diametro come $L1:n\sqrt{-1} = \frac{1}{n}L1:\sqrt{-1} = L1:\sqrt{-1}$. Questo dubbio
quale propongo intorno la somiglianza delle ragioni $1:-1$, $-1:1$ mi viene
benchè proposto dal Chiarissimo Sig.r Ab.e Boscovich: ma già da gran tempo
avevo io questo rilevato dalla Lettera (105) di Leibnitz a Gio: Bernoulli.
Ma si dirà riferita la periferia al ramo della logaritmica nella quale la
semiordinate sono negative si trova la periferia al diametro come $L-1:\sqrt{-1}$
rimanente; ma questo non proverà altro, che i logaritmi delle quantità
negative siano eguali a' logaritmi delle quantità positive. Si suole inoltre
dire: dato che la periferia si esprima per $\frac{4}{\sqrt{-1}}L\sqrt{-1}$ se si concede al Sig.r [illegible]
si che questa medesima periferia si possa esprimere per $\frac{2}{\sqrt{-1}}L-1$ overo per $\frac{1}{\sqrt{-1}}L1$,
altro non si fa che concederli che nella Logaritmica ordinaria nella quale
uno è il protonumero, e tutte le semiordinate positive, si possano considerare delle
semiordinate $-1$, $\sqrt{-1}$, negative ed immaginarie. Ma concesso questo quando sono
arrivati ad esprimere nella logaritmica ordinaria la periferia per
$\frac{1}{\sqrt{-1}}L1$, già si vede che la stessa periferia si potrà esprimere per $\frac{c}{\sqrt{-1}}L1$,
relativamente a questa ordinaria Logaritmica, (l'idea semplicissima della
quale ci fa conoscere, che $nL1$, $\frac{1}{n}L1$, $\frac{n}{m}L1$ è sempre $= L1$) e per conseguenza
sia la periferia al diametro come $L1:\sqrt{-1}$. Se poi si dica che $1$, $\sqrt{-1}$, $-1$, rappre=
sentano semiordinate di rami differenti della Logaritmica, allora domanderò se es=
sendo uno protonumero nel ramo delle semiordinate positive, e $-1$ protonumero
nel ramo delle semiordinate negative anche $\sqrt{-1}$ sia protonumero nel ramo
delle semiordinate immaginarie. Se questo si afferma niuna maraviglia, che
$4L\sqrt{-1}$ sia eguale a $2L-1 = L1$, mentre il logaritmo del protonumero
nel proprio ramo è sempre $0$, incominciando da questo i logaritmi delle
semiordinate, superiori, o inferiori al protonumero. In questa ipotesi adunque
sempre si verificherà essere la periferia al diametro come $L1:\sqrt{-1} = 0:\sqrt{-1}$. Se
poi si dica che $\sqrt{-1}$ rappresenti una semiordinata qualunque diversa dal proto=
numero allora è certo che nel ramo delle semiordinate immaginarie $\sqrt{-1}$
averà qualche distanza dal protonumero, e però $0$ non sarà il suo loga=
ritmo: ma in questo caso benchè $\sqrt{-1}$ si conceda medio tra il protonume=
ro $1$ ed il protonumero $-1$, e benchè $\sqrt{-1}$ abbia il suo logaritmo, questo non
basterà per dire che il logaritmo di $\sqrt{-1}$ sia la metà del logaritmo di $-1$
mentre $\sqrt{-1}$ si pone medio ma tra due protonumeri da quali ne' proprii
rami cominciano i logaritmi. In questo caso adunque bisognerà dimostrare
che $\sqrt{-1}$ quale si suppone medio tra $1$ e $-1$ debba avere per logaritmo la me=
tà del logaritmo di $-1$, dal che ne verrà che $-1$ quale pur anche si concede
medio tra uno ed uno debba avere per logaritmo la metà del logaritmo di
uno. Ma tutto questo cessa dal sentimento di Eulero; come adunque il Sig.r
[illegible] in fare $\frac{16}{n\sqrt{-1}}L\sqrt{-1} = \frac{4}{n\sqrt{-1}}L-1 = \frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$ potrà supporre il sentimento di Eule=
ro quale poi si deduce dall'osservare la periferia $= \frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$. Nè si dica che
l'essere la periferia eguale ad $\frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$ si deduca dalla formola generale
$\frac{1}{n\sqrt{-1}}L\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ nella quale fatto $z=0$, l'arco $u$ viene $= \frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$; mentre bi=
sogna riflettere, che due sono i casi fatto $z=0$: cioè fatta la tangente eguale
al zero, l'arco anche puole essere zero; e fatta la tangente eguale
al zero, l'arco puole essere $\pm p \pm 2p \pm 3p \pm$ &c: onde dimostrar si deve, che in
tutti i casi diversi, possa sempre valere $\frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$: che se senza dimostrazione
si asserisce è certo, che fatto l'arco $u=0$ dovrà essere $\frac{1}{n\sqrt{-1}}L1 = 0$; se adunque
si dica che $\pm p \pm 2p \pm 3p \pm$ &c sia anche eguale ad $\frac{1}{n\sqrt{-1}}L1$: e bisognerà questo di=

mostrare, e bisognerà supporre che già diversi siano i Logaritmi di 1; ciò che si deve dimostrare. Ma in qual modo si dimostrerà la periferia formola $\frac{1}{\sqrt{-1}} l1 = \pm q \pm 2p \pm 3p \pm \&c.$? con ricorrere alla formola $\frac{4q}{\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$, quale rappresenta la periferia, onde la semiperiferia $= \frac{4}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1} = \frac{m4}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1}$ (intendendo per m qualunque numero positivo o negativo ed intero) eguale sempre ad $\frac{1}{\sqrt{-1}}$... Se adunque 1, $\sqrt{-1}$, $-1$, si prendano per semiordinate di rami diversi della logaritmica nel dimostrare $\frac{4}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1} = \frac{4}{2\sqrt{-1}} l{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1$; che è lo stesso nel mostrare la periferia al diametro come $l-1 : \sqrt{-1}$ bisogna già supporre il sentimento di Eulero; nel dimostrare poi il sentimento di Eulero, supponendo $\frac{4}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1} = \frac{m4}{2\sqrt{-1}} l\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l1$ bisogna supporre già la periferia al diametro come $l-1 : \sqrt{-1}$, onde bisogna dimostrare idem per idem.



Se la linea AE versatile intorno il punto C si muova da A in D descrivendo l'arco AD; nel tempo medesimo il punto E descriverà l'arco Ed con una contraria direzione: onde considerato l'arco AD positivo, l'arco Ed si potrà considerare come negativo: onde se AG si dica x, EJ tangente dell'arco Ed sarà $-x$. Il vero adunque, perchè dz è eguale a $-\frac{a^2dz}{a^2-z^2}$ sarà, perchè è incremento dell'arco Ed, quale per supposizione cresce in contrario al crescere dell'arco AD. Siccome adunque dell'arco AD compimento al semicircolo, è non solo l'arco DE, ma anche l'arco DA, si potrà dire, che la tangente dell'arco di compimento al semicircolo sia z prendendo l'arco Ad per compimento, sia $-z$ prendendo l'arco Bd per compimento. Parlando adunque accuratamente, se z sia la tangente dell'arco u sarà $-z$ tangente dell'arco $-u$, e questo è conforme all'idee del Sig. Jesuiti, quale avendo fatto $z = -1$ l'arco senza distinzione alcuna lo pone eguale a $-45°$. Se adunque l'arco u si ponga eguale ad $\frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$, accuratamente parlando l'arco $-u$ sarà eguale ad $\frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$. Quando dico che si z che $-z$ possono essere tangenti dell'arco di compimento al semicircolo, altro non intendo dire che la tangente z determina l'arco AD, determinato anche sia l'arco di compimento al semicircolo, e così similmente se la tangente $-z$ determina l'arco Ed determinato anche sia l'arco di compimento al semicircolo. Ciò posto siccome il Sig. Jesuiti dall'avere li archi $0, \pm p \pm 2p \pm 3p \pm \&c.$ la stessa tangente 0 benchè diversi siano tra di loro senza punto esaminare la diversità de' casi, deduce, che tutti debbano essere eguali ad $\frac{1}{\sqrt{-1}} l1$ ... per non poter dedurre, che siccome l'arco u, e l'arco di compimento al semicircolo hanno la stessa tangente z; $\frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ non solo doverso esprimere l'arco u, ma anche quello di compimento. Questo però ho sempre detto io contento del Sig. Jesuiti; mentre io medesimo in seguito del paragrafo fo vedere, che chiamando q l'arco di compimento, questo arco q sarà eguale ad $\frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ dovendo essere l'arco u all'arco q come la quantità espressiva dell'arco u al quarto, quale dovrà esprimere l'arco q. Si dirà forse che l'arco di compimento sarà eguale alla mezza periferia meno l'arco u, ovvero $= p - \frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$; onde essendo $p = \frac{1}{\sqrt{-1}} l1$ sarà l'arco di compimento al semicircolo sempre eguale ad $\frac{1}{\sqrt{-1}} l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$: Ma che così si debba esprimere l'arco di compimento, ne viene dall'essere $p = \frac{1}{\sqrt{-1}} l1$; il che come di sopra si è osservato o non costa, o se si suppone bisogna in seguito supporre ciò, che si deve dimostrare.

Nel paragrafo ottavo io disapprovo il metodo di Eulero. La seconda ragione quale non ho che accennata nel mio saggio, a me sembra decisiva, onde mi preme...

Sig. Conte Prone Riv.mo 

Sig.r Conte che qui con tutta la chiarezza le esponga, attendendone poi il suo sentimento. Il Sig.r Eulero crede che il Logaritmo di $(1+i)$ debba essere $i$ suposto $i$ infinitamente piccolo. Il Sig.r Restuti sembra, che creda essere questa una mera supposizione d'Eulero. Io posso ciò evidentemente dimostrarlo; e quando il Sig.r Conte ne desideri la dimostrazione mi farò sommo pregio communicargliela. Non dubito adunque fare $l(1+i)=i$. Da questa equazione ottimamente deduce Eulero dover essere $n\,l(1+i)=ni=l(1+i)^n$. Suppone di poi, che $(1+i)^n$ debba essere eguale a qualunque numero $x$ diverso dall'unità; è questo anche, benchè nel mio opuscolo non accordi al Sig.r Eulero, per mezzo di altre mie posteriori riflessioni posso incontrastabilmente dimostrarlo. Chiama $y$ il logaritmo di $x$, e quindi deduce $(1+i)^n=x$, $y=lx=l(1+i)^n=ni$. Ciò posto essendo $(1+i)^n=x$, sarà $1+i=x^{\frac{1}{n}}$, onde $i=x^{\frac{1}{n}}-1$; ma $y=ni$ dunque sarà anche $y=nx^{\frac{1}{n}}-n$, o vero $n+y=nx^{\frac{1}{n}}$ onde $1+\frac{y}{n}=x^{\frac{1}{n}}$, ed $(1+\frac{y}{n})^n=x$ e finalmente $(1+\frac{y}{n})^n-x=0$. Fin qui ottimamente. Fatto questo per determinare tutti i logaritmi di 1 dice. Si faccia $x=1$ sarà $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$ o vero $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$. Ma questa equazione prima di andare oltre, fatto $x=1$ è assurda. Ai fatti nella sua equazione generale $(1+\frac{y}{n})^n-x=0$ in luogo di $y$ si sostituisca il suo valore $ni$, e si avrà $(1+\frac{ni}{n})^n-x=0$ o vero $(1+i)^n-x=0$. In questa equazione se si faccia $x=1$ l'equazione diviene assurda, mentre essendosi supposto $i$ quantità infinitamente piccola e reale ne [illegible] che $(1+i)^n$ fosse eguale ad 1 il che ripugna per lo stesso Eulero. Per determinare i logaritmi di $-1$ pone Eulero $x=-1$, ed allora l'equazione sarà $(1+i)^n+1=0$ il che di nuovo ripugna. Benchè adunque la quantità $x$ sia indeterminata con tutto ciò le condizioni di essere $i$ infinitamente piccola quantità, e reale, escludono da tutti i valori possibili di $x$, il valore determinato di 1, di $-1$, di $\sqrt{-1}$, di $-\sqrt{-1}$, quali valori suole Eulero, che possano competere ad $x$ non ostante le condizioni sopradette. Io non vedo cosa si possa opporre a questa semplicissima dimostrazione. Ma supposta l'equazione generale di Eulero $(1+\frac{y}{n})^n-x=0$ vediamo qual valore possa mai avere $y$ logaritmo di $x$ allorchè $x$ si faccia eguale all'unità. Si faccia adunque come suole Eulero $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$ rappresentando $y$ in questo caso il logaritmo di uno. Posta l'espressione $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$ trova Eulero una formola quale esprime in genere tutti i fattori trinomiali di $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$: e siccome nel Tom: 1 Introductio in Analysin infinitorum Cap: 9: Parag: 151 dimostra della funzione $a^n-z^n$ tutti i fattori trinomiali possibili contenersi nella formola generale $aa-2az\cos:\frac{2k}{n}p+zz$: ipsa formula (dice Eulero) si loco $k$ omnes numeri pares non majores quam $n$ ponantur, simul dabit omnes factores; ubi de factoribus quadratis idem est tenendum, quod ante monuimus. Ac primo quidem posito $k=0$ prodire factor $aa-2az+zz$ pro quo vero radix $a-z$ capi debet. Secondo questi suoi principii crede Eulero essere il fattore trinomiale in genere della formola $(1+\frac{y}{n})^n-1^n=0$, $(1+\frac{y}{n})^2-2\cos:\frac{\lambda mp}{n}.(1+\frac{y}{n})+1^2$ qual fattore trinomiale pone anche eguale a zero, essendo la funzione $(1+\frac{y}{n})^n-1^n$ generata dalla moltiplicazione di questi fattori eguale a zero. Essendo adunque $(1+\frac{y}{n})^2-2\cos:\frac{\lambda mp}{n}.(1+\frac{y}{n})+1^2=0$, e fatto il raggio $=1$, essendo $1^2=\cos:^2\frac{\lambda mp}{n}+\text{sen}:^2\frac{\lambda mp}{n}$, ed essendo quindi sarà $(1+\frac{y}{n})^2-2\cos:\frac{\lambda mp}{n}.(1+\frac{y}{n})+\cos:^2\frac{\lambda mp}{n}=-\text{sen}:^2\frac{\lambda mp}{n}$, ed estraendo la radice sarà $1+\frac{y}{n}-\cos:\frac{\lambda mp}{n}=\pm\sqrt{-\text{sen}:^2\frac{\lambda mp}{n}}=\pm\text{sen}:\frac{\lambda mp}{n}\sqrt{-1}$ ma essendo $n$ infinito, sarà $\cos:\frac{\lambda mp}{n}=1$ e $\text{sen}:\frac{\lambda mp}{n}=\frac{\lambda mp}{n}$ onde trova altra equazione $1+\frac{y}{n}-1=\pm\frac{\lambda mp}{n}\sqrt{-1}$, e finalmente $y$, o vero il logaritmo di uno eguale $\pm\lambda mp\sqrt{-1}$. Per venire ora a capo di ciò che intendo dimostrare prendasi un fattore trinomiale di una forma generica $pp-2pq\cos:\varphi+qqzz$ ed il fattore trinomiale $(1+\frac{y}{n})^2-2\cos:\frac{\lambda mp}{n}.(1+\frac{y}{n})+1^2$ di sopra posto, corrisponderà alla forma di questo trinomio. Ora se nel trinomio generico $\cos:\varphi$ sia $=1$ i fattori semplici di questo trinomio saranno $qz-p\cos:\varphi$, $qz-p\cos:\varphi$ onde il fattore

trinomiale nel caso che si ponga $z = \frac{p}{g} \cdot \text{Cos:}\,\varphi$ si troverà eguale al vero del nostro fattore $(1+\frac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n} \cdot (1+\frac{y}{n}) + 1^2$ paragonato con il generico, cos: $\varphi$ corrisponde a $\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n}$, $z = 1$, $g = 1$. I fattori adunque del nostro fattore saranno $1 - (1+\frac{y}{n}) \cdot \text{cos:}\,\frac{2mp}{n}$, $1 - (1+\frac{y}{n}) \cdot \text{cos:}\,\frac{2mp}{n}$. Allora adunque sarà il nostro fattore eguale a zero quando 1 sia eguale $(1+\frac{y}{n}) \cdot \text{cos:}\,\frac{2mp}{n}$; e come costantemente si pone $\text{cos:}\,\frac{2mp}{n} = 1$ allora il fattore trinomiale sarà zero, quando costantemente $y$ sia anche zero. Non puole adunque supposto, che costantemente $\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n}$ sia eguale all'unità, il trinomio $(1+\frac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n} \cdot (1+\frac{y}{n}) + 1^2$ supporsi zero, se anche $y$ costantemente non si ponga zero. Che se poi $\text{cos:}\,\frac{2mp}{n}$ non si faccia costantemente eguale all'unità, non sarà in questo caso $\text{Sen:}\,\frac{2mp}{n} =$

Si prenda ora di novo il trinomio $pp - 2gpz\,\text{Cos:}\,\varphi + ggzz$. I fattori di questo fattore trinomiale supposto che cos: $\varphi$ non sia $= 1$ sono $g z - p \cdot (\text{Cos:}\,\varphi + \sqrt{-1} \cdot \text{Sen:}\,\varphi)$, $gz - p \cdot (\text{Cos:}\,\varphi - \sqrt{-1} \cdot \text{Sen:}\,\varphi)$. Di più questo fattore trinomiale non sarà mai zero se non si faccia $z = \frac{p}{g} \cdot (\text{Cos:}\,\varphi + \sqrt{-1} \cdot \text{Sen:}\,\varphi)$ o $z = \frac{p}{g} \cdot (\text{Cos:}\,\varphi - \sqrt{-1} \cdot \text{Sen:}\,\varphi)$. Prendendo ora il nostro fattore, saranno i fattori del trinomio $(1+\frac{y}{n})^2 - 2\,\text{cos:}\,\frac{2mp}{n} \cdot (1+\frac{y}{n}) + 1^2$, $1 - (1+\frac{y}{n}) \cdot (\text{Cos:}\,\varphi + \sqrt{-1} \cdot \text{Sen:}\,\varphi)$, $1 - (1+\frac{y}{n}) \cdot (\text{Cos:}\,\varphi - \sqrt{-1} \cdot \text{Sen}\,\varphi)$. Allora adunque il trinomio si potrà fare zero quando si supponga l'unità reale eguale ad $(1+\frac{y}{n}) \cdot (\text{Cos:}\,\varphi + \sqrt{-1} \cdot \text{Sen}\,\varphi)$, o vero eguale ad $(1+\frac{y}{n}) \cdot (\text{Cos:}\,\varphi - \sqrt{-1} \cdot \text{Sen}\,\varphi)$, il che manifestamente ripugna. Si dica essere $(1+\frac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n} \cdot (1+\frac{y}{n}) + 1^2$ fattore trinomiale della formola $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$ quale supponendosi eguale al zero è tutti i possibili fattori trinomiali dalla multiplicazione de quali deve risultare zero essendo espressi per la formola $(1+\frac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\frac{2mp}{n} \cdot (1+\frac{y}{n}) + 1^2$, sarà conforme alla ragione, fare il fattore trinomiale eguale a zero. A questa difficoltà io posso rispondere con i principii dello stesso Eulero tutti i fattori adunque trinomiali attualmente si determinano col fare prima $2m = 0$ e di poi per $2m$ porre tutti i numeri pari non maggiori di $n$. Tutti i fattori adunque possibili saranno questi, quali

$$(1+\tfrac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\tfrac{0p}{n} \cdot (1+\tfrac{y}{n}) + 1^2$$
$$(1+\tfrac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\tfrac{2p}{n} \cdot (1+\tfrac{y}{n}) + 1^2$$
$$(1+\tfrac{y}{n})^2 - 2\,\text{Cos:}\,\tfrac{4p}{n} \cdot (1+\tfrac{y}{n}) + 1^2$$

io esprimo continuando fino all'infinito. Nel primo fattore trinomiale occorrendo il coseno di $\frac{0p}{n}$, o vero il coseno dell'arco zero, ed essendo il coseno dell'arco zero eguale al seno di $90° - 0° = 1$ come lo insegna Eulero fa nel citato Cap. 9 quindi il primo fattore trinomiale sarà un perfetto quadrato $(1+\frac{y}{n})^2 - 2(1+\frac{y}{n}) + 1^2$ nel qual caso come di sopra ho osservato secondo Eulero medesimo il fattore sarà $(1+\frac{y}{n}) - 1$. Se questo primo fattore sarà zero, anche la funzione $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n$ sarà zero; essendo chiaro, che se uno de fattori, dalla multiplicazione de quali ne risulta una funzione sia zero, sarà necessariamente zero la funzione. Se poi il primo fattore $(1+\frac{y}{n}) - 1$ non sarà zero nè pur zero sarà la funzione, alcuno de fattori trinomiali; onde nè pur zero sarà la funzione $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n$, quale già si è stabilita zero. Che se il primo fattore $(1+\frac{y}{n}) - 1$ sia zero, anche $y$ dovrà essere zero. So qui pregh il Chiarissimo ... conte a ponderare queste mie obiezzioni contro il metodo di Eulero ... do farne l'uso in una memoria quale fra breve, communicherò al Publico. Se da tutto ciò il metodo di Eulero è assurdo, e pur concorda con quello del Pessuti, bisogna dire o che fortunatamente dal falso ha dedotto il vero il ... Eulero, o che anche il metodo del Sig.r Pessuti è assurdo.

Sig. Conte Pron. Riv.mo 

Al paragrafo undecimo dico non potere essere $a\,l\sqrt{-1} = a\,l{-1}$ perchè $\sqrt{-1}$ non è medio
tra $-1$ e $-1$. Io in questo luogo come mi esprimo adduco la ragione di Gio. Bernoulli
e siccome il doppio logaritmo di una quantità, secondo le idee più semplici alle-
ra è eguale al logaritmo del quadrato della stessa quantità quando questa
quantità è media proporzionale tra l'unità positiva e negativa, secondo che
questo quadrato è positivo o negativo, ed il quadrato stesso: quindi essendo il qua-
drato di $\sqrt{-1} = -1$, prendendo l'unità negativa si trova che $\sqrt{-1}$ non è medio tra
$-1$ e $-1$. Del resto nel paragrafo XII dico anche, che questa ragione puole essere
soggetta a qualche eccezione mentre $\sqrt{-1}$ è medio tra $1$ e $-1$.
Le riflessioni quali si degna fare su del § XIII si riducono a considerare
due serie $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$ quale dice Geometrica, e relativa a diversi rami
di una stessa Logaritmica, ed altra corrispondente $0, \frac{1}{4}p, \frac{1}{2}p, \frac{3}{4}p, p$, aritmetica.
A questa serie in primo luogo si puole riferire ciò che da me è stato osser-
vato nelle riflessioni relative al mio § V. In secondo luogo bramerei, che
di questi infiniti rami nella stessa Logaritmica, due reali, ed altri im-
maginarii si dimostrassero. Io confesso il vero, se su uno stesso assintoto
si costruiscano i due rami uno positivo, e l'altro negativo, a questo as-
sintoto reale io non so concepire come si possono riferire dei rami imma-
ginarj. In terzo luogo si potrebbe dubitare se la serie $1, \sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, 1$
fosse veramente geometrica mentre come sopra vi è osservato si puole
dubitare se $1:-1, -1:1$ costituiscano una proporzione.
Vengo ora all'ultime riflessioni. L'elemento $\frac{dz}{1+z^2}$ è certo eguale a $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}} + \frac{dz\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$: ma $\frac{dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$ non rappresenta l'elemento d'un logaritmo immaginario?
Questo logaritmo non si deve prendere nell'assintoto di questa Logaritmica?
come dunque si puole concepire la sottangente $=1$, e però reale, in un
assintoto, le di cui parti sono immaginarie. Di più l'elemento $\frac{dz}{1+z^2}$ è anche
incontrastabilmente eguale a $\frac{\frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot -dz\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$. L'elemento del loga-
ritmo d'una quantità è sempre eguale al differenziale della quantità me-
desima moltiplicato per la sottangente, diviso per la quantità istessa; sarà
dunque conforme alla ragione, che nelle frazioni $\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot -dz\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} - \frac{\frac{1}{2}\sqrt{-1}\cdot dz\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}\right)$
la sottangente sia rappresentata da $\sqrt{-1}$, non potendosi concepire sottor-
dinate immaginarie, logaritmi di queste quantità immaginarj e per con-
seguenza assintoto immaginario, e di poi sottangente, quale altro non è
che una retta costante presa nello assintoto, reale. In questo caso adun-
que l'arco come dimostro nello stesso paragrafo XVIII si troverà $=$
$\frac{1}{2}l\frac{1-z\sqrt{-1}}{1+z\sqrt{-1}}$, e dato ciò dico rovinata la proporzione della periferia
al diametro come $l-1 : \sqrt{-1}$, e dico anche rovinato il metodo del Sig.
Bernoulli in determinare i logaritmi infiniti d'una data quantità. Altre
cose io qui aggiungerei: conoscendo però di essermi abusato di molto della soffe-
renza del Chiarissimo Sig. Conte, a me stesso impongo fine con esibire
nel tempo istesso la mia debole servitù, con rimettere i più distinti ossequj
da parte dello stimatissimo P. Jacquier, e con la più perfetta stima di chia-
rarmi

di V. S. Ill.ma 3 Ottobre 1776

P.S. Il Sig. d'Alembert quale mi ha signata lettera già da qualche tempo oltre l'avvertir-
mi, che nel Vo: I Mem: VI de suoi opuscoli matematici credo di avere evidentemente
dimostrato contro il Sig. Eulero che i logaritmi delle quantità negative si possono
ben supporre reali, mi aggiunge su questo punto una brevissima dimostrazione.
Credo adunque che il tutto si riduca a dimostrare, che $l-1$ sia $=0$. Sia adun-
que $l-1 = x$ sarà $l(-1)^3 = 3l-1 = 3x$, ma
$(-1)^3 = -1$ onde $l(-1)^3 = l-1 = x$ dunque $3x = x$
dunque $x = 0$

Dev.mo Oblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli

314

Sig. Conte P.rone Riv.mo 

Eccole la soluzione del Problema proposto dal Sr. Fermat al P. Cavalieri, e la soluzione di questo matematico. Non mi creda tanto bravo e paziente da far le figure, che troverà, non sono esse opera mia. Se in altro posso impiegarmi per servirla mi comandi, che niente più bramo, quanto il mostrarle col fatto di esser tale quale con tutto il rispetto mi dichiaro

Di Lei Sig. Co. P.rone Stim.o

Padova. 10. Ottobre. 1778.

Umil. Dev.mo Obbl. Servit.
D. Pier-maria Bolina.

guli, FBG, FBH, sunt aequales, quia recti; et anguli, GBD, HBC, pariter inter se aequales. Ergo et, FBD, FBC, erunt aequales. 48.3. Co.

Corollarium.

Constat e contra omnium minimam esse perpendicularem tangenti in puncto occursus, et efficere angulos aequales cum ductis ab occursu ad focos.

[illegible] per un

uli, FBG, FBH, sunt aequales, quia recti; et an-
guli, GBD, HBE, pariter inter se aequales. Ergo et,
FBD, FBE, erunt aequales. 48.3. Co.

Corollarium.

Constat e contra omnium minimam esse perpen-
dicularem tangenti in puncto occursus, et efficere
angulos aequales cum ductis ab occursu ad focos.

F. Bonaventurae Cavalerii Exercitat. Geometricarum 

Exercit. VI. pag. 504. Edit. Bononiensi an. 1647.

De inveniendo puncto, quod a tribus datis quibusvis distet secundum minimam quantitatem.

Propositum fuit hoc problema, prout mihi relatum est, ab insigni Galliae Mathematico D. de Fermat, ad cujus solutionem ita progressus sum. Suppono ergo, datis tribus quibusvis punctis, dari quoque tres minimas rectas lineas, vel saltem duas tribus aequipollentes, quae a communi puncto, ad ipsa duci possint. Deinde sequentes propositiones sic demonstro.

Propositio XXIII.

Si sit Semiellipsis, ABC, diameter, AC, foci, D, E, punctum quodcunque, F, extra, et ad eandem ellipsis partem, FB, perpendicularis tangenti, GH, in, B, junganturque, BD, BE, dico, FB, esse omnium, quae ad ellipsim duci possunt, brevissimam, eamque efficere angulos, FBD, FBE, aequales

Est enim, FB, omnium minima quae ad rectam GH duci possunt, et subinde minima quoque erit omnium ad semiellipsim, ABC, ab, F, ducibilium. Insuper anguli, FBG, FBH, sunt aequales, quia recti; et anguli, GBD, HBE, pariter inter se aequales. Ergo et, FBD, FBE, erunt aequales. Figura I. 48.3. Co.

Corollarium.

Constat e contra omnium minimam esse perpendicularem tangenti in puncto occursus, et efficere angulos aequales cum ductis ab occursu ad focos.

306

317

316 Propositio XXIV.

Si tria data puncta fuerint in recta linea, vel in angulis trianguli: punctum quaesitum non erit extra rectam vel triangulum propositum, aut in ejusdem ambitu.

Fig. 2. Sint tria puncta data, A, B, C, vel in recta linea AC, vel in angulis trianguli, ABC, Dico punctum quaesitum non esse extra rectam, AC, vel extra triangulum ABC, aut in illius ambitu. Sit n., si fieri potest, ut in D extra rectam, AC, indefinite hinc inde productam vel in, D, extra planum trianguli, ABC, tunc demissa rectae, vel plano trianguli perpendiculari, DE, et junctis, DA, DB, DC, EA, EB, EC, patet EA minorem esse hypothenusa, AD, et sic reliquas, EB, EC, reliquis hypothenusis, DB, DC, minores esse. Non ergo, DA, DB, DC, erunt minimae ducibilium a, D, ad, A, B, C, puncta. Igitur punctum quaesitum non est extra, AC, vel planum trianguli, ABC.

Fig. 3. Supponatur nunc, F, punctum quaesitum esse in directum ipsius, AC, vel in plano, ABC, sed extra ipsum triangulum, ABC. Producta ergo, CA, in, F, et junctis, FB, FA, FC, quarum, FA, secet, BC, in, H, et intra, HF, sumpto quoque puncto, G, ac junctis, GB, GC, manifestum est in figura 2a. quod appropinquantes puncto, A, breviores quam sint, FA, FB, FC, assumi possunt ad aliud punctum intra, F, A, positum, non ergo illae sunt minimae. Et quia etiam continuo accedentes ad, B, possunt semper breviores et breviores haberi, ideo nullibi erit punctum quaesitum, nisi pro eo statui velimus punctum B, in quo tres distantiae in duas tantum ~~[illegible]~~

DB, DC, degenerabunt. In 3ª vero figura erunt BF, FC, majores ipsis, ~~[illegible]~~ BG, GC, et addita communi, AG, erunt, BF, FC, AG, majores ipsis, BG, GA, [illegible] GC, et multo majores ipsae, [illegible] BF, FA, FC; non ergo istae erunt minimae.

Sit nunc assumtum punctum ut, H, in ambitu trianguli, intelligaturque focis, AB, chordaque, AHB, descripta ex parte, H, semiellipsis; unde, CH, ducta a puncto, C, extra semiellipsim ad punctum, H, si tres, CH, HA, HB, sunt omnium minimae, erit pariter omnium ad ellipsim descriptam a puncto, C, ducibilium minima, efficietque cum, HB, HA, hinc inde angulos aequales, quod est absurdum, est enim, CH, in directum ipsi, HB. Non ergo punctum quaesitum erit extra rectam, AC, vel extra triangulum, ABC, aut in ejus ambitu. Hoc tamen intellige, nisi pro quaesito uno datorum uti velimus, tribus distantiis, tunc in duas tantum degenerantibus; hoc enim contingere poterit, ut nunc patebit. Quod [illegible] 319

## Propositio XXV.

Si tria data puncta fuerint in angulis trianguli angulum habentis graduum 120. vel majorem, punctum quaesitum non erit aliud quam unum ex datis punctis, illud nempe, quod breviora trianguli latera terminabit.

Sint data puncta, A, B, C, in angulis triangu. Fig. 4 ABC, cujus angulus, BAC, sit gradum 120, vel major, et breviora latera sint, BA, AC; Dico non aliud haberi punctum quaesitum quam, A, quo uti possumus, tribus distantiis in duas, AB, AC, d[illegible]

306

314

310 generantibus. Sit enim, si esse potest punctum D, cujus (junctis, DA, DB, DC,) tres distantiae sint minimae. Si ergo focis, A, B, et chorda, DBA, intelligatur ex parte D, descripta semiellipsis, quoniam DA, DB, DC, ponuntur esse minimae, erit, CD, omnium ad semiellipsim ducibilium minima, et

Coroll. 3 hujus ideo faciet aequales angulos, CDB, CDA. Eodem modo per ~~[illegible]~~ semiellipsim descriptam focis, A, C chorda, ADC, ostendemus, angulos, BDA, BDC, pariter esse aequales. Tres ergo, BDA, ADC, CDB, erunt inter se aequales, et singuli graduum 120. Sed, BAC, non est minor quam graduum 120. ex hypothesi. Ergo, BDC, erit vel

.21. I Elem. aequalis vel minor ipso, BAC, quod est absurdum. Non ergo dabitur minima triga distantiarum ad punctum intra triangulum, sed nec in ambitu, vel extra. Ergo cum datur minima quantitas, saltem in duabus distantiis tales erunt, BA, AC, ipsumque, A, deserviet pro quaesito, Quod &c.

Corollarium

Hinc patet si punctum quaesitum sit intra triangulum datorum punctorum, non aliud esse quam illud apud quod fiunt ad data puncta tres circumstantes anguli, singuli graduum 120.

Propositio XXVI.

Supposito dari minimam quantitatem in tribus distantiis, oportebit tria data puncta esse in angulis trianguli, cujus unusquisque sit minor gradibus 120.

Fig. 5. Non enim dabitur minima triga distantiarum ad punctum extra triangulum, vel in illius ambitu, ergo illud erit intra, critque necessarium, apud quod fiunt circumstantes anguli singuli gr. 120. At tale punctum non potest reperiri intra, si aliquis trianguli dati angulus

fuerit graduum. 120. vel major. Superest ergo videndum, num possit haberi, cum anguli erunt singuli minores gradibus 120. 3 A. 1
Quod sic patebit. sit triangulum, ABC, datorum punctorum, A, B, C, et in eo quilibet angulus minor gradibus 120. fiant itaq. super, AB, AC, triangula isoscelia, ADB, AEC, quorum anguli, D, E, + intervallis, DA, AE, peripheriae describantur, AGB, AGC, quas indefinite productas, dico se secare intra triangulum, ABC. Quod .n. illae non sibi occurrant vel in, BC, vel subter, BC, manifestum est, quia versus, BC, continuo disjunguntur, quod etiam amplius patebit inferius. Similiter non se tangent in, A, essent enim, DA, AE, sibi in directum, quod est falsum: etenim anguli, DAB, EAC, singuli sunt graduum 30. et, BAC, minor gradibus 120. unde tres, DAB, BAC, EAC, faciunt minus quam gr. 180. sed nec extra, ut in, F, concurrent, junctis .n., BF, FC, cum, BDA, sit angulus ad centrum, et, BFA ad circumferentiam, erit ille hujus duplus, et subinde, BFA, erit gr. 60. Eadem ratione constabit, AFC, esse gr. 60, unde totus, BFC, erit gr. 120. sed et eo major est, BAC, erit ergo, BAC, major gr. 120 contra hypothesim, quod est absurdum. Restat igitur, ut concursus non possit fieri nisi intra; fiet autem in uno tantum puncto, quia peripheriae conveniunt in, A, et circulus circulum non nisi in duobus punctis secare potest. Sit ergo talis concursus in, G, et jungantur, GA, GB, GC; dico autem singulos angulos, AGB, AGC, BGC, esse gr. 120. Sumpto .n. in altera peripheriarum, ut in, DEA, continuata versus, A, quolibet puncto, ut, H, junctisque, HA, HB, erunt anguli, AHB, AGB, oppositi aequales duobus rectis, sed angulus, H, erit graduum 60, cum sit $\frac{1}{2}$ anguli, D, ad centrum: ergo, AGB, erit gr. 120. Eodem modo probabitur, AGC, esse gr. 120. quare, BGC, reliquus ad 4 rectos

Right margin notes:
+ aequalibus lateribus constituti singuli sint gr. 120, et centris, DE, intervallis &.
20 3 Elem
21. 1. Elem.
10. 3. Elem
22. 3. Elem

306

314

326 erit pariter gr. 120. Ex hoc constat, si concursus fieret in I, quod duo anguli, AIB, AIC, essent gr. 240, quod est absurdum, essent .n. vel aequales duobus rectis, vel illis minores. Pa- tet ergo in hujusm. triangulo posse reperiri punctum, apud quod fiant anguli singuli gr. 120. ad illudq. et non ad aliud punctum constitui trium distantiarum a datis pun-

Cor. 21. hujus. ctis minimam quantitatem. Quod ostendere opus erat

-mina
lo
nell'
pro=
lo
ri=
lo
adun=
ne y
ossi=
luto
ra=
luto
oso=
o
ino
quis=
osa
ran
osso
lo
infi=
sita
ito,
sera

oponi
n pro=
an=
i =
di
to
iusi=
sicon,
sorsa
io sa
che
che
ro

azione
della
o
lo
ione
d°
nio
io
infi
infi=

Sqp=
mo.-

305

Treviso 14 Ottobre 1776

Umil.$^{mo}$ Divot.$^{mo}$ Obbl.$^{mo}$ Servitore  
Giordano Riccati

P. D. Pier-Maria Colina  
Bibliotec.$^{o}$ di S. Giustina Padova.

31

Ill.mo Sig.ra Sig.ra P.rona Colma

Dall'ultima volta, che le ho scritto, insieme al presente
io non ha avuto altro incomodo, salvochè ...

Molto Rev.do P.re Sig.re P.rone Colmo

Mille, e poi mille grazie per la copia gentilmente speditami con tanta sollecitudine della soluzione data dal P. Cavalieri nelle sue Esercitazioni Geometriche al problema proposto da M. de Fermat. Mio Fratello in fatti si è incontrato col Cavalieri descrivendo un'ellisse, a cui due dei tre punti dati servon di fochi, dalla quale principalmente dipende l'eleganza della soluzion del problema. Nella mia Risposta adunque io mi sono rettamente fidato dell'asserzione del Sig. Ab. Passeti. Ella mi conservi la grazia sua, mi onori dei suoi comandi, e si degni di credermi a tutta prova quale mi protesto col maggiore rispetto

Di V. P. Molto Rev.da

Treviso 14 Ottobre 1776

P. D. Pier-Maria Colinà
Bibliotec.° di S. Giustina Padova.

Umil.mo Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

306

31

324 Molto Ill.re Rev.do Sig.re [illegible]

[illegible] gentilmente

[illegible]

[illegible] grazie [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] mente [illegible]

mi conservi a questa [illegible]

[illegible] nostro tal maggiore [illegible]

Molto Reverendo

[illegible]

Ill.mo Sig.re Sig.re Padron Colmo

Dall'ultima volta, che le ho scritto, insino al presente
io non ho avuto altro incomodo, salvo che nuova
[illegible]

31

Ill.mo Sig.r Sig.r P.rone Col.mo 3 2 5

Dall'ultima volta, che le ho scritto, rispetto al prospetto
... non ha avuto altro incomodo, salvoché una
leggera risipola nella gamba destra come l'
anno passato. Mentre io stava con qualche sol-
lecitudine non vedendo sue lettere, me ne
perviene una, che mi riesce gratissima, perché
mi assicura dell'ottimo suo stato di salute, e
mi dà la grata notizia, che attualmente si
imprime il primo Tomo del suo Corso Matema-
tico. [illegible]
Intorno all'Acustica mi è riuscito di seguire la con-
[illegible], di cui la Natura si serve, per far sì, che
lasciata in libertà una corda stimolata al suono
con una penna, si accomodi ben tosto ad una
curva bilanciata ed isocrona. Il tempo, che c'
impiega dovrà esser uguale a quello di una
sua vibrazione, e quindi non può adattarsi alla
curva isocrona di un ventre solo, avendo dimos-
trato, che in tale ipotesi ci si spenderebbe un
tempo minore del giusto. Il perché si dee spiegare
[illegible] una curva composta di più semplici
isocrone, onde vibrandosi produca un aggregato
di suoni, il che s'accorda mirabilmente coll'
esperienza. //

Ill.mo Sig.r Gian-Antonio Radavilla
Bologna

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Il Sig. Ab. Gioacchino Pessuti [illegible] si lamentava dell'estratto delle Istituzioni Analitiche di mio fratello che è stato inserito nei due primi Tomi del Giornale di Modena. Aggiungendo in esso a molte lodi più di una critica, l'Ab. Vincenzo gli indirizzò una Lettera, in cui rendeva conto dell'operato, a cui non rispose il Pessuti. Essendo egli passato a miglior vita, feci stampare la detta Lettera nella Raccolta del P. Mandelli, il che mosse l'Ab. Pessuti a pubblicare in Livorno le sue Riflessioni Analitiche, nelle quali pretende di avere trionfato di mio fratello. A questa ho disteso una Risposta anonima scritta con tutta la moderazione; poi consegnarla al Sig. Abate, la quale vedrà alla luce nel Tomo XV. del predetto Giornale. In altro Tomo saranno parimente inserite sei Lettere, cinque dell'Ab. Vincenzo, ed una mia sopra i Logaritmi dei numeri negativi, intorno ai quali verte principalmente la controversia fra mio fratello e il Ab. Pessuti, e singolarmente sulla proporzione l-1 : V-1 fra la circonferenza circolare, ed il diametro stabilita da Giovanni Bernoulli. Resto con pienissima stima

Di V.S. Ill.ma Treviso 16 Ottobre 1774.

Ill.mo Sig. Pietro Giannini
Segovia

Aff.mo Servitor vero
Giordano Riccati

Ill.$^{mo}$ Sig.$^{r}$ Gian-Antonio Badavilla
Bologna

Divot.$^{mo}$ Obbl.$^{mo}$ Servitore
Giordano Riccati

31

Ill:mo Sig:r Sig:r Prone Colmo    329    41

...sai dottissima lettera, Sig. Ab. Rivmo, andavo rispon=
dendo in più riprese, onde con mio piacere si prolun=
...la nostra letteraria corrispondenza.

Ill:mo Sig:r Sig:r Prone Colmo    327

Io mi prendo il coraggio di rinnovare di tanto in
tanto i disturbi a V. S. Ill:ma, pregandola di
indirizzare a Segovia la lettera, che le in=
chiudo. Ella ne incolpi la sua sperimentata
benignità, la quale mi anima a supplicarla, che
se mai le capitassero alle mani le Esercitazioni
Geometriche di Bonaventura Cavalieri stampate
costì l'anno 1647. mi faccia il favore di
acquistarle per conto mio. La prima volta
che ha occasion di vedere il Sig:r Giacomo
Mariscotti, gli porti i miei complimenti, e
desideroso de' pregiatissimi suoi comandi
ho l'onore di protestarmi con pienissima
stima e rispetto

Di V. S. Ill:ma

Treviso 16. Ottobre 1776

Ill:mo Sig:r Gian-Antonio Radavilia
Bologna

Divot:mo Obbl:mo Servitore
Giordano Riccati

306

324

Ill:mo Sig:re Sig:re Pro.ne Col.mo 3 n 9

Alla sua cortesissima lettera, Sig. Ab. Riviera, andavo rispon=
dendo in più riprese, onde con mio piacer si prolun=
ghi la nostra letteraria corrispondenza.

Alla sua dottissima lettera, Sig. Ab. Riviera, andavo rispondendo in più riprese, onde con mio piacer si prolunghi la nostra letteraria corrispondenza.

Per dimostrare l'equazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}=1$ quando la tangente $z$ è infinita, io faccio $z=\frac{a}{0}$ onde si abbia $\frac{\frac{a}{0}-a\sqrt{-1}}{\frac{a}{0}+a\sqrt{-1}}=1$; e conseguentemente $\frac{0}{0}\cdot\frac{1-0\sqrt{-1}}{1+0\sqrt{-1}}=1$. Ella mi accorda, che se fosse $\frac{0}{0}=1$, si dovrebbe concedere $\frac{1-0\sqrt{-1}}{1+0\sqrt{-1}}=1$, e perciò legittima la mia dimostrazione. La frazione $\frac{0}{0}$ può ricevere infiniti valori secondo le varie condizioni de' problemi. Le due quantità $x$, $y$ si annullino congiuntamente, formata la frazione $\frac{x}{y}$, se nell'atto di annullarsi le due grandezze, è $x$ infinitamente maggiore di $y$, ne proviene $\frac{0}{0}=\infty$: se $x$ si riferisca ad $y$ in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0}$ = ad una quantità finita: e finalmente se $x$ è minima in riguardo ad $y$, ne risulta $\frac{0}{0}=0$. Si caderebbe dunque in paralogismo supponendo generalmente $\frac{0}{0}=1$; e quindi egli è d'uopo provare, che ciò si avvera nel nostro caso. Faccio $z=\frac{a}{n}$, e trovo $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}=\frac{\frac{a}{n}-a\sqrt{-1}}{\frac{a}{n}+a\sqrt{-1}}=$

$\frac{n}{n}\cdot\frac{1-n\sqrt{-1}}{1+n\sqrt{-1}}$: ma $\frac{n}{n}$ è certamente $=1$; dunque

e valendoci della formola $u=\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\left(\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)$, troveremo le due serie di numeri, e di archi

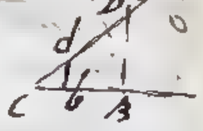
$-1,\ -\sqrt{-1},\ 1,\ \sqrt{-1},\ -1$

$0,\ \frac{1}{4}p,\ \frac{1}{2}p,\ \frac{3}{4}p,\ p$

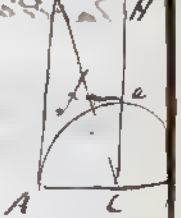
Ella mi muove di osservare, che le due coppie di serie

nascono

$\frac{2-a\sqrt{-1}}{2+a\sqrt{-1}} = \frac{1-n\sqrt{-1}}{1+n\sqrt{-1}}$, e ponendo $n=0$; $\frac{2-a\sqrt{-1}}{2+a\sqrt{-1}} = \frac{1-0\sqrt{-1}}{1+0\sqrt{-1}} = 1$; il che &c. Osservisi, che per quanto n sia piccola, nella frazione $\frac{n}{n}$ le due n si agguagliano, e nell'atto che entrambe stanno per annullarsi, perseverando ad essere $n=n$, ed $\frac{n}{n}=1$, anche quando $n=0$, si verifica l'equazione $\frac{n}{n}=\frac{0}{0}=1$. Rischiarisi questa verità con esempio del triangolo CAD, il cui angolo DCB sia semiretto, e retto l'angolo B, che fa l'ordinata $BD=y$ coll'ascissa $CB=x$. Poichè $CB=x=BD=y$, sarà $\frac{x}{y}=1$ qualunque grandezza si assegni ad x. Sia $Cb=x$ menomissima, e prossima ad annullarsi, e non pertanto essendo $Cb=x=bd=y$, ne proverrà $\frac{x}{y}=1$, e lo stesso parimente si avvererà quando $x=y=0$.



Il tentare di svolgere in una serie la frazione $\frac{0}{0} = \frac{0}{1-1} = 0+0+0+0$ &c. non ottiene verun effetto; perchè per quanto si continui la progressione dei nulla, è gittata la fatica, restando sempre il complemento $\frac{0}{1-1}$, ch'è quella quantità, che inutilmente si è presa a svolgere.



L'analogia $fe : eC = 1 :: AC = a : AG = z$ ci dà generalmente $fe \cdot z = a$, qualunque valore

valore si assegni ad fa. Dunque fa = y, e mi si presenta l'equazione all'iperbola fra gli assintoti $zy = 1.a$, nella quale stando sempre z in ragione inversa di y, il prodotto zy si mantiene permanentemente costante. Sia $y = 0$, e ne risulterà $z = \frac{1.a}{0}$, e $zy = \frac{1.a}{0} \cdot 0 = 1.a \cdot \frac{0}{0}$: ma nel caso presente $\frac{0}{0} = 1$; dunque $zy = 1.a$ anche quando $y = 0$.

La frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ riuscirà sempre immaginaria, qualora z sia o minima, o finita, o infinita relativa, cioè a dire uguale ad una costante diversa per una quantità infinitesima. Ma posta $z = 0$, ovvero $z = \frac{a}{0}$, la nostra frazione diviene reale, uguagliandosi nella prima ipotesi a $-1$, e nella seconda a $+1$, qualmente è stato da me dimostrato.

La settimana ventura passerò a versare sul paragrafo V. della sua bella Dissertazione, ed intanto rinnovando per lo stimatissimo P. Jacquier gli attestati della mia divozione, a Lei mi dedico col maggiore rispetto

Di V.S. Ill:ma

Treviso 16 Ottobre 1776

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot. Obb.mo Servitore
Giordano Riccati

e valendoci della formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{-1\pm2\sqrt{-1}}{3-2\sqrt{-1}}\right)$, troveremo le due serie di numeri, e di archi

$-1,\ -\sqrt{-1},\ 1;\ \sqrt{-1},\ -1$

$0,\ \frac{1}{4}p,\ \frac{1}{2}p,\ \frac{3}{4}p,\ p$

...lla mi conviene di osservare, che le due coppie di serie

nascono

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo 341

Il piacere sommo che provo nella nostra letteraria corrispondenza mi determina a scrivere la presente prima ancora di ricevere altra sua stimatissima, quale ... promette nella sua ultima. ... mi dice la frazione $\frac{x}{y}$ ... nelle ... di annullarsi le due grandezze, e x infinitamente maggiore di y ne pro... $\frac{0}{0} = \infty$, se x si riferisce ad y in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0}$ = ad ... finita: e finalmente se x è minima in riguardo ad y ne ri...



Adempire la mia promessa, accingendomi nuovamente a discorrere sul paragrafo V. del suo dottissimo Saggio Analitico. Se i Sig.ri Antecessori avessero sciolto compiutamente il problema, che determina gli archi circolari col mezzo dei logaritmi, sarebbero pure venuti alla formola $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{\pm a \pm z\sqrt{-1}}{a - z\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{\pm 1 \pm z\sqrt{-1}}{1 - z\sqrt{-1}}\right)$, quando si supponga $a = 1$. I segni diversi si riferiscono ai protonumeri $\pm 1$. Cominciando dal protonumero $= 1$, se $u = 0$, è parimente $z = 0$, e perciò $u = 0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$. Ad $u = \frac{1}{4}p$ corrisponderà $z = 1$, e quindi $u = \frac{1}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\sqrt{-1}$. L'arco $u = \frac{1}{2}p$ richiede la tangente $z = \frac{1}{0}$, onde ne risulti, come ho dimostrato nella precedente mia lettera, $u = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l-1$. All'arco $u = \frac{3}{4}p$ si verifica la tangente $z = -1$, e conseguentemente $u = \frac{3}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l-\sqrt{-1}$. Finalmente l'arco $u = p$ ha la tangente $z = 0$, e perciò $u = p = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l1$. Posto adunque il protonumero $= 1$, la premessa formola determina necessariamente le due seguenti serie geometrica di numeri, aritmetica di archi

$1,\ \sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ 1$

$0,\ \frac{1}{4}p,\ \frac{1}{2}p,\ \frac{3}{4}p,\ p$

Collo stesso metodo, supponendo il protonumero $= -1$, e valendosi della formola $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{-1-z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)$, troveremo le due serie di numeri, e di archi

$-1,\ -\sqrt{-1},\ 1,\ \sqrt{-1},\ -1$

$0,\ \frac{1}{4}p,\ \frac{1}{2}p,\ \frac{3}{4}p,\ p$

Ma mi giova di osservare, che le due coppie di serie

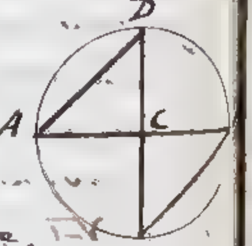
nascono

306 332

31

334

nascono necessariamente dalla supposizione del p-
rammento $= \pm 1$ perchè nella prima coppia $4l\sqrt{-1}$
$2l{-1} = l{-1}$, e nella seconda $4l{-}\sqrt{-1} = 2l\,1 = l{-1}$, essen-
do in fatti $4\cdot\frac{1}{4}p = 2\cdot\frac{1}{2}p = p$.
Secondo quello che giudico, non si darebbe materia di
controversia, che [illegible] $= 1 : 1$ siano una vera serie
geometrica. Non è solo dimostrata la proposizione
diretta, che se quattro termini sono proporzionali, il
prodotto degli estremi si agguaglia a quello dei medj
ma ancora la conversa, che se i detti prodotti si agu-
gliano, i quattro termini sono proporzionali. Inoltre
due quantità non cangiano proporzione, quando si mol-
tiplicano per la stessa grandezza. Non si muterà dun-
que la relazione di $1 : -1$ moltiplicando i due termi-
per $-1$, onde divengano $-1, +1$; dunque $1 : -1 :: -1 :$
il che ec. Ma facendo ricorso alla geometria, abbi-
il circolo ADBe descritto col raggio
$CB = 1$. Se le ascisse da C verso B
si considerano positive, quelle da C
verso A si prendono in qualità di
negative. Lo stesso dicasi delle ordinate,




che per la direzione CD si assumeranno come positi-
e per la contraria come negative. La similitudine
dei triangoli DCA, eCB mi somministra l'analog-
$DC : CA :: eC : CB$, o sia per la cosa detta
$1 : -1 :: -1 : 1$, il che conferma essere i
termini $1, -1, -1, 1$ veramente proporzionali.
Dice ottimamente lo stimatissimo Sig. Abate, che assu-

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo

341

Il piacere sommo che provo nella nostra letteraria corrispondenza, mi determina a scrivere la presente prima ancora di ricevere altra sua stimatissima, quale si promette nella sua ultima. E formata mi dice la frazione $\frac{x}{y}$, pur nelli caso di annullarsi le due grandezze, e $x$ infinitamente maggiore di $y$ ne proviene $\frac{0}{0} = \infty$; se $x$ si riferisce ad $y$ in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0} =$ ad una quantità finita; e finalmente se $x$ è minima in riguardo ad $y$ ne ri=

313 5

come protonumero, sono altresì tali non solamente medio geometrico fra 1 ed 1, ma ancora $\pm\sqrt{-1}$ medj proporzionali fra 1 e −1. Al protonumero 1 corrispondono gli archi 0, p, ecc., la cui tangente = 0. Mi pongo sotto gli occhi due unità, e su a ciascuna di esse ci adatto il logaritmo = 0; anche a −1 medio geometrico fra 1 ed 1 si riferirà il logaritmo = 0 medio aritmetico fra due nulla, onde ci si presenteranno le due serie

1, −1, 1 geometrica

0, 0, 0 aritmetica, che dimostrano −1 protonumero.

Ma se alla prima unità ci applico il logaritmo = 0, ed alla seconda il logaritmo proporzionale a $p$; al medio geometrico −1 competerà l'arco $\frac{1}{2}p$ medio aritmetico fra 0, e $p$, onde risulteranno le serie

1, −1, 1 geometrica

0, $\frac{1}{2}p$, $p$ aritmetica

ma altrimenti assegnando alle due unità il logaritmo = 0, presa fra esse tre medie continue proporzionali geometriche, e fra i due nulla altrettante medie aritmetiche, avremo la serie

1, $\sqrt{-1}$, −1, $-\sqrt{-1}$, 1 geometrica

0, 0, 0, 0, 0 aritmetica, dalle quali raccoglieremo essere $\pm\sqrt{-1}$ protonumeri. Che se la prima unità riceverà il logaritmo = 0, e la seconda il logaritmo proporzionale a $p$; ne proverranno le due progressioni relative

1, $\sqrt{-1}$, −1, $-\sqrt{-1}$, 1 geometrica

0, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$ aritmetica.

assunto da principio il protonumero = −1, si sarebbero trovate

31

336

trovate le due doppie di serie

$-1$, $-\sqrt{-1}$, $1$, $\sqrt{-1}$, $-1$ geometrica

$0$, $0$, $0$, $0$, $0$ aritmetica

$-1$, $\sqrt{-1}$, $1$, $\sqrt{-1}$, $-1$ geometrica

$0$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$ aritmetica, la prima delle quali fa vedere, che stabilito $-1$ come protonumero sono tali per conseguenza anche $-1$, $\mp\sqrt{-1}$.

Si uniscano insieme le due supposizioni, facendo il protonumero $= \pm 1$, e ci si presenteranno le due progressioni $\pm 1$, $\pm\sqrt{-1}$, $\mp 1$, $\mp\sqrt{-1}$, $\pm 1$ geometrica $0$, $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$ aritmetica, che in primo luogo dimostrano corrispondere lo stesso logaritmo a due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo: ci insegnano in secondo luogo, che essendo $\frac{1}{2\sqrt{-1}} l \mp 1 = \frac{1}{2}p$, e perciò $\frac{1}{\sqrt{-1}} l \mp 1 = p$, si avrà

$p : 1 :: \frac{1}{\sqrt{-1}} l \mp 1 : 1 :: l \mp 1 : \sqrt{-1}$, cioè la semicirconferenza circolare al raggio, o sia la circonferenza al diametro, come $l \mp 1 : \sqrt{-1}$, espressione, che abbraccia le due ipotesi del protonumero $= \pm 1$.

Un secondo esempio farà via più conoscere l'[illegible] del grado della nostra curva. Egli è facile di dimostrarsi, che nel circolo del raggio $= 1$ la tangente dell'arco $\frac{1}{6}p$ si agguaglia ad $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Nella formola $\frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{\pm 1 \pm z\sqrt{-1}}{1 - z\sqrt{-1}}\right) = u$ si sostituisca $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in cambio di $z$, $\frac{1}{6}p$ in cambio di $u$, onde si abbia $\frac{1}{2\sqrt{-1}} l\left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{6}p$, e ci si presenti[illegible] i principj delle due serie

$\pm 1$, $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}$ geometrica

$0$, $\frac{1}{6}p$ aritmetica; le quali si continueranno

nel

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Colmo. 341

Il piacere sommo che provo nella nostra letteraria corrispondenza, mi determina a scrivere la presente prima ancora di ricevere altra sua stimatissima, quale mi promette nella sua ultima. = Formata mi dice la frazione $\frac{x}{y}$ ... nello stato di annullarsi le due grandezze, se x infinitamente maggiore di y ne proviene $\frac{0}{0} = \infty$, se x si riferisce ad y in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0} =$ ad quantità finita: e finalmente se x è minima in riguardo ad y ne ri... allora la nostra

337

nel modo seguente

$$\pm 1,\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \pm\left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^2,\ \left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^3,\ \pm\left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}}\right)^4 \text{ \&c.}$$

$$0,\quad \tfrac{1}{6}p,\quad \tfrac{1}{3}p,\quad \tfrac{1}{2}p,\quad \tfrac{2}{3}p \quad \text{\&c.}$$

o sia effettuando i computi

$$\pm 1,\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{\pm\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} - \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \mp 1,\ \frac{\pm\frac{1}{3} \mp \sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} + \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{\pm 1 \mp \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 + \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \pm 1$$

$$0,\quad \tfrac{1}{6}p,\quad \tfrac{1}{3}p,\quad \tfrac{1}{2}p,\quad \tfrac{2}{3}p,\quad \tfrac{5}{6}p,\quad p$$

...endosi fra ±1 e ±1 prese cinque medie continue proporzionali geometriche, a ciascuna di esse compete la prerogativa di protonumero; imperciocchè ad... attando alle due unità il logaritmo = 0, si hanno le due serie

$$\pm 1,\ \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 - \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{\pm\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} - \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \mp 1,\ \frac{\pm\frac{1}{3} \mp \sqrt{-\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3} + \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \frac{\pm 1 \mp \sqrt{-\frac{1}{3}}}{1 + \sqrt{-\frac{1}{3}}},\ \pm 1$$

$$0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,\quad 0,$$

le quali ci rendono manifesto, che ad ognuna delle cinque medie geometriche conviene il logaritmo = 0 ... schivare la soverchia lunghezza, non aggiungo altri esempj, che ci somministrerebbero nuovi, e più composti protonumeri.

... soluzione della difficoltà relativa al paragrafo V. che ... ella seguita a toccare, dipende dal riflettere, che a l-1 infiniti valori competono, e che fra questi avendo luogo $p\sqrt{-1}$, ciò basta, perchè si avveri la proporzione $l\,{-1} : \sqrt{-1}$ fra la circonferenza circolare, ed il diametro stabilita da Giovanni Bernoulli.

... termine a questa lettera proponendo un metodo, col mezzo del quale si possono determinare le tangenti

dalle

334

Dalle parti $0, \frac{p}{n}, \frac{2p}{n}$ &c. $\frac{np}{n} = p$ del semicircolo

quantità $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$ si alzi ordinatamente alle potestà

1, 2, 3, 4, 5, 6 &c. n, e ne nascerà la serie

$$\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{1+2z\sqrt{-1}-z^2}{1-2z\sqrt{-1}-z^2}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{1+3z\sqrt{-1}-3z^2-z^3\sqrt{-1}}{1-3z\sqrt{-1}-3z^2+z^3\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{1+4z\sqrt{-1}-6z^2-4z^3\sqrt{-1}+z^4}{1-4z\sqrt{-1}-6z^2+4z^3\sqrt{-1}+z^4}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^5 = \frac{1+5z\sqrt{-1}-10z^2-10z^3\sqrt{-1}+5z^4+z^5\sqrt{-1}}{1-5z\sqrt{-1}-10z^2+10z^3\sqrt{-1}+5z^4-z^5\sqrt{-1}}$$

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^6 = \frac{1+6z\sqrt{-1}-15z^2-20z^3\sqrt{-1}+15z^4+6z^5\sqrt{-1}-z^6}{1-6z\sqrt{-1}-15z^2+20z^3\sqrt{-1}+15z^4-6z^5\sqrt{-1}-z^6}$$

&c.

Se il semicircolo $p$ non si divida, esser dee $\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = 1$, e quindi $1+z\sqrt{-1} = 1-z\sqrt{-1}$, $2z\sqrt{-1} = 0$, o sia $z = 0$, che è quanto a dire la tangente del semicircolo $= 0$.

Il semicircolo diviso in due parti mi dà $\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^2 = \frac{1+2z\sqrt{-1}-z^2}{1-2z\sqrt{-1}-z^2} = 1$, e per conseguenza $1+2z\sqrt{-1}-z^2 = 1-2z\sqrt{-1}-z^2$. Questa equazione ha due radici $z=0$, $z=\infty$, l'ultima delle quali serve per l'arco $\frac{1}{2}p$, e la prima per gli archi $= \begin{cases}0\\p\end{cases}$

Si partisca il semicircolo in tre porzioni, e si troverà

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{1+3z\sqrt{-1}-3z^2-z^3\sqrt{-1}}{1-3z\sqrt{-1}-3z^2+z^3\sqrt{-1}} = 1,$$

e perciò $1+3z\sqrt{-1}-3z^2-z^3\sqrt{-1} = 1-3z\sqrt{-1}-3z^2+z^3\sqrt{-1}$, e cancellate le quantità, che si distruggono, $3z\sqrt{-1}-z^3\sqrt{-1} = -3z\sqrt{-1}+z^3\sqrt{-1}$ dalla qual formola divisa per $z\sqrt{-1}$, il che mi dà $z = 0$

si

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Colmo.



Il piacere sommo che provo nella nostra letteraria corrispondenza, mi determina a scrivere la presente prima ancora di ricevere altra sua stimatissima, quale mi promette nella sua ultima. = Formata mi dice la frazione $\frac{x}{y}$ per nell' atto di annullarsi le due grandezze, e $x$ infinitamente maggiore di $y$ ne proviene $\frac{0}{0}=\infty$, se $x$ si riferisce ad $y$ in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0}=$ ad una quantità finita: e finalmente se $x$ è minima in riguardo ad $y$ ne ri= ... la nostra



si deduca $z^2=3$, e conseguentemente $z=\pm\sqrt{3}$, quod in fatti $\sqrt{3}$ è la tangente dell'arco $=\frac{1}{3}p$, e $-\sqrt{3}$ la tangente dell'arco $=\frac{2}{3}p$, ed $=0$ la tangente degli archi $=\left\{\begin{matrix}0\\p\end{matrix}\right.$.

Dividendo il semicircolo in quattro parti, dovrà essere

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^4=\frac{1+4z\sqrt{-1}-6z^2-4z^3\sqrt{-1}+z^4}{1-4z\sqrt{-1}-6z^2+4z^3\sqrt{-1}+z^4}=1;$$

equazione, da cui si raccoglie $1+4z\sqrt{-1}-6z^2-4z^3\sqrt{-1}+z^4=1-4z\sqrt{-1}-6z^2+4z^3\sqrt{-1}+z^4$, che dimostra poter essere $z=\left\{\begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}\right.$. Ma quando $z$ non è quantità infinita, avremo $8z^3\sqrt{-1}=8z\sqrt{-1}$, e dividendo per $8z\sqrt{-1}$, $z^2=1$, e quindi $z=\pm1$, che sono le tangenti degli archi $\frac{1}{4}p$; $\frac{3}{4}p$. La tangente $z=\infty$ compete all'arco $\frac{1}{2}p$, e la tangente $=0$ agli archi $0$, e $p$.

Passiamo alla divisione del semicircolo in cinque parti, che determina

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^5=\frac{1+5z\sqrt{-1}-10z^2-10z^3\sqrt{-1}+5z^4+z^5\sqrt{-1}}{1-5z\sqrt{-1}-10z^2+10z^3\sqrt{-1}+5z^4-z^5\sqrt{-1}}=1,$$

e quindi $10z\sqrt{-1}-20z^3\sqrt{-1}+2z^5\sqrt{-1}=0$, e perciò dividendo per $2z\sqrt{-1}$, onde si abbia la radice $z=0$, $z^4-10z^2+5=0$. Supplendo il quadrato si troverà $z^4-10z^2+25=20$, ed estraendo la radice, $z^2-5=\pm\sqrt{20}$, o sia $z^2=5\pm\sqrt{20}$, e finalmente $z=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{20}}=\pm\sqrt{5\pm2\sqrt{5}}$. Dispongo in serie gli archi, e le relative tangenti

$$0,\quad \tfrac{1}{5}p,\quad \tfrac{2}{5}p,\quad \tfrac{3}{5}p,\quad \tfrac{4}{5}p,\quad p$$
$$0,\ \sqrt{5-2\sqrt{5}},\ \sqrt{5+2\sqrt{5}},\ -\sqrt{5+2\sqrt{5}},\ -\sqrt{5-2\sqrt{5}},\ 0.$$

Partito in sei porzioni eguali il semicircolo, avremo

$$\left(\frac{1+z\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}}\right)^6=\frac{1+6z\sqrt{-1}-15z^2-20z^3\sqrt{-1}+15z^4+6z^5\sqrt{-1}-z^6}{1-6z\sqrt{-1}-15z^2+20z^3\sqrt{-1}+15z^4-6z^5\sqrt{-1}-z^6}=1,$$

e ne raccoglieremo primieramente $z=\left\{\begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}\right.$, ed indi $12z\sqrt{-1}-40z^3\sqrt{-1}+12z^5\sqrt{-1}=0$, e per conseguenza $z^4-\frac{10}{3}z^2+1=0$, ed aggiungendo $\frac{16}{9}$ da entrambe le parti, $z^4-\frac{10}{3}z^2+\frac{25}{9}=\frac{16}{9}$

ed

ed estratta la radice, $z^2 - \frac{5}{3} = \pm\frac{4}{3}$, e perciò $z^2 = \left\{\begin{matrix}3\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$ e $z = \left\{\begin{matrix}\pm\sqrt{3}\\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}}\end{matrix}\right.$. Registro qui sotto la serie degli archi, e delle tangenti, che loro convengono.

$0, \quad \frac{1}{6}\rho, \quad \frac{1}{3}\rho, \quad \frac{1}{2}\rho, \quad \frac{2}{3}\rho, \quad \frac{5}{6}\rho, \quad \rho$

$0, \quad \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{3}, \quad \infty, \quad -\sqrt{3}, \quad -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad 0$

Il gentilissimo Sig. Abate scusi la soverchia lunghezza della lettera, e si degni di credermi quale colla più distinta stima ho l'onore di dichiararmi

Di V. S. Ill.ma

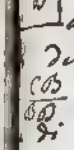
Treviso 22 Ottobre 1726.

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

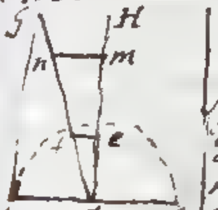
Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Colmo.



[illegible] piacere sommo che provo nella nostra letteraria corrispondenza, mi determino
[illegible] scrivere la presente prima ancora di ricevere altra sua stimatissima, quale
[illegible] promette nella sua ultima. = Formata mi dice la frazione $\frac{x}{y}$ per nell'
[illegible] di annullarsi le due grandezze, e $x$ infinitamente maggiore di $y$ ne pro=
[illegible] $\frac{0}{0}=\infty$, se $x$ si riferisce ad $y$ in proporzione finita, abbiamo $\frac{0}{0}=$ ad
[illegible] quantità finita: e finalmente se $x$ è minima in riguardo ad $y$ ne ri=
[illegible] $\frac{0}{0}=0$. Rifletta qui il Chiarissimo Sig.r Conte essere la nostra
[illegible] questione se zero assoluto diviso per zero assoluto eguagli l'unità. Quando adun=
[illegible] si dica = se nell'atto di annullarsi = per già si suppone, che ne $x$, nè $y$
[illegible] ridotte allo zero assoluto, ma sol tanto al relativo, mentre è impossi=
[illegible], che il zero assoluto di $x$ sia infinitamente maggiore del zero assoluto
[illegible] $y$: che il zero assoluto di $x$ si riferisca al zero assoluto di $y$ in una ra=
[illegible] finita: e che il zero assoluto di $x$ sia minimo rispetto al zero assoluto
[illegible] $y$; essendo il zero assoluto di qualunque quantità $x$ lo stesso, che il zero asso=
[illegible] di qualunque altra quantità $y$. Il discorso adunque tiene ottimamente
[illegible] nella frazione $\frac{0}{0}$, si il numeratore, che denominatore rappresentino
[illegible] relativi, ovvero infinitesime delle quantità $x$ ed $y$. Che poi la nostra quis=
[illegible] sia, se il zero assoluto diviso per il zero assoluto, eguagli l'unità, è cosa
[illegible] il rilevarlo. Nella prima pagina della sua stabilissima trovo la tan=
[illegible] $z$ infinita $=\frac{a}{0}$. Il denominatore della frazione $\frac{a}{0}$ deve essere zero asso=
[illegible] mentre nell'ultima pagina della sua gratissima leggo, dover essere la
[illegible] frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ immaginaria = qualora $z$ sia, o minima, o finita, o infi=
[illegible] relativa; cioè lo dire uguale ad una costante diviso per una quantità
[illegible] infinitesima. Se adunque nella frazione $\frac{a}{0}$ il denominatore è zero assoluto,
[illegible] nell'equazione $\frac{0}{0}\cdot\frac{1-0\sqrt{-1}}{1+0\sqrt{-1}}=1$ la frazione $\frac{0}{0}$ deve avere per numera=
[illegible], e denominatore il zero assoluto.
[illegible] del triangolo equicruro CBD prova ottimamente essere $\frac{Cb}{bD}=1$; suppone=
[illegible]dosi però Cb minima quanto uno vuole, o prossima ad annullarsi: non pro=
[illegible] però essere anche $\frac{Cb}{bD}=1$, in caso che Cb, e bD già si suppongano an=
[illegible] nullate, o sieno zeri assoluti. Ne giova il dire, che essendo $\frac{CB}{BD}=1=$
[illegible] a qualunque infinitesima di CB divisa per qualunque infinitesima di
[illegible] debba essere anche, il zero assoluto di CB diviso per il zero assoluto di BD

$\frac{CB}{BD}=1$: mentre in primo luogo il zero assoluto non entrando nelle infinitesi=
[illegible] di qualunque minimo grado di una quantità, non vale l'illazione. In secon=
[illegible] luogo raziocinando in questo modo, se il triangolo CBD non si supponga isosce=
[illegible] BD a motivo d'esempio si supponga la metà di BC: in questo caso sa=
[illegible] $\frac{BC}{BD}=\frac{1}{2}$: cioè il zero assoluto di BC metà del zero assoluto di BD; il che
[illegible]; mentre non avendo il zero assoluto di BC parte alcuna, è impossibile che
[illegible] essere metà del zero assoluto di BD, quale altro non è, che lo stesso zero
[illegible] di BC.
[illegible] $\frac{0}{0}=\frac{0}{1-1}=0+0+0+0$ &c. rifletta ottimamente, che non si ottiene
[illegible] risolvendosi la frazione $\frac{0}{0}=\frac{0}{1-1}$ deve continuamente decrescere il valore della
[illegible] effetto. Con la divisione continua deve [illegible] di residuo la stessa frazione $\frac{0}{1-1}$,
[illegible] frazione residuale; rimanendo adunque sempre di residuo [illegible] assegnare i zeri di quoto; onde la
[illegible] realmente non si fa divisione alcuna con assegnare i zeri di quoto, onde la
[illegible] serie infinita di zeri non rappresenterà il vero quoto, che nasce dalla divisione
[illegible] zero per 1-1. Queste ragioni sono quelle, che dimostrano falsa il metodo di
[illegible] in fare $\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=1-1+1-1+1-1+$ &c. il quale io stesso disapprovo nella mia
[illegible]. Ciò non ostante risolvendo la frazione $\frac{0}{0}$ in una serie infinita di
[illegible] mi venga con ciò ad uniformare alle sue proprie idee. La tangente è infi=
[illegible] si pone eguale ad $\frac{a}{0}$: dunque secondo le sue idee $\frac{1}{0}$ sarà eguale all'infi=

tarà $p:1::\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$ al : ma $\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}=7\pm1$ ; dunque
$p:1::\sqrt{-1}\,f\pm1:2::-f\pm1=f\pm1:\frac{-1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$.

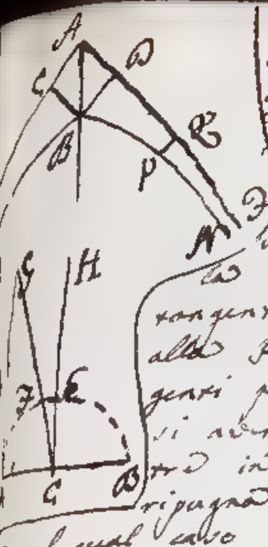
306 nito: ma $\frac{1}{0} = \frac{1}{1-1} = 1+1+1+1+1$ ⁊ più la stessa frazione residuale $\frac{1}{1-1}$
finita unità: non ostante, che la frazione residuale sia $\frac{1}{1-1}$, o ripu
no il vero quoto di $\frac{1}{1-1}$; ed allora anche la infinita serie di zeri
3 la frazione residuale sia $\frac{0}{1-1}$ sarà il vero quoto di $\frac{0}{1-1}$: o pure l'infini
unità non rappresentano il vero quoto, ed allora $\frac{1}{1-1}$ non sarà eguale all'in
to come si crede. Non occorre qui dire essere il vero quoto di $\frac{0}{1-1} =$
$0+0+0$ ⁊ $+ \frac{0}{1-1}$: mentre con ciò la frazione residuale $\frac{0}{1-1}$, quale si cre
eguale all'unità, sarebbe maggiore del determinato quoto, o vero della
serie infinita di zeri; qual cosa non concorda con le idee semplicissime
divisione, quale ci fa conoscere essere nell'attuale divisione la
zione di residuo minore sempre dell'assegnato quoto. Lasciando però
parte una tale discussione, sia $\frac{0}{0} = 1$. Essendo $\frac{0}{0} = \frac{1}{0} \cdot 0$ e supponendo
$= \infty$, sarà sempre vero, che una serie infinita di zeri, il che equivale
zero moltiplicato per l'infinito, eguagli l'unità. Similmente, sia $\frac{0}{0} =$
Essendo $\frac{1}{0} = \infty$, ed avendo le due frazioni $\frac{0}{0}, \frac{1}{0}$ lo stesso denominato
zero assoluto, staranno come i numeratori; onde $\frac{0}{0} : \frac{1}{0} = 0 : 1$: onde
$\frac{1}{0} \cdot 0 = 1$: cioè una serie infinita di zeri eguale all'unità. Di più
è eguale all'unità, sarà $\frac{0}{0} \cdot 3 = \frac{3 \cdot 0}{0} = 3$: ma $3 \cdot 0 = 0$, dunque $\frac{3 \cdot 0}{0} =$
dunque $3 = 1$. Ciò che dico di 3 si dica di qualunque altro numero
retto. Ma senza cercare altre ragioni indirette: secondo i suoi detti
$= \infty$ o vero $\frac{1}{1-1} = \infty$. Si moltiplichi di qua, e di là per $1-1$, o vero per
e si troverà $\frac{1-1}{1-1} = \infty - \infty$ il che equivale a $\frac{0}{0} = 0$.
Si troverà vera la proporzione $fe : eC = 1 = AC = a : AS = z$ fino a tanto che




$fe$ abbia il valore di linea benché infinitesima quanto uno vu
che se poi $fe$ divenga zero assoluto non si potrà più concepir
proporzione uscendo tre termini di questa, quelli sono $eC$
$AS$ omogenei riferendosi tutti ad una estenzione di lunghez
ed il primo del tutto eterogeneo, quale è il zero assoluto para
rato con qualunque linea, o infinitesima, o finita, o infi
Ciò si conferma con riflettere, che allora $fe$ si riduce al zero
assoluto, quando il punto $f$ cada sopra di $e$ sicché è lo st
quando della linea $fe$ al più rimanga il solo estremo punto $e$: onde
dotta la $fe$ al zero assoluto, i quattro termini della proporzione sono il
to $e$, $eC$, $AC$, $AS$: ora chi vuolle concepire la proporzione di questi termini
Chi può concepire, che il rettangolo di $eC \cdot AC$ eguagli il punto multiplicato
in $AS$. Di più ottimamente riflette che il prodotto di $AS \cdot fe$ essendo
sempre eguale ad $1 \cdot a$ debba essere sempre costante: ma a motivo de tri
li simili, essendo qualunque linea $nm : mC = fe : eC$ sarà anche secondo i suoi prin
il zero assoluto di $nm : mC = AC : AS$ onde il zero assoluto di $nm : AS = mC : AC$: ma
zero assoluto di $nm$ è lo stesso che il zero assoluto di $fe$. dunque anche il zero
assoluto di $fe : AS = mC : AC$, e però il prodotto di $fe \cdot AS$ non sarà costante come
pretende, ridotta anche $fe$ allo zero assoluto, anzi prendendo le sue denomina
zioni, faccio anche io $zy = 1 \cdot a$; quindi fatta $y = 0$ sarà $z = \frac{1 \cdot a}{0}$, e moltiplica
$z$ per $1-1 = 0 = y$ e $\frac{1 \cdot a}{0}$ per zero sarà $z - z = \frac{1 \cdot a \cdot 0}{0}$: dunque secondo i suoi
principii $z - z = 0 = 1 \cdot a$. Supponendo, adunque $y = 0$, il prodotto $zy$ non solo
sarà costante ma bensì zero. A tutto ciò aggiungo essere impossibile
concepire la tangente del quadrante perfetto essendo le linee $AS$, e $H$
parallele; ma siccome la tangente del quadrante meno un' infinitesima
dello stesso quadrante, è anche tangente del quadrante; quindi per conc
la tangente del quadrante bisogna, che $fe$ sia minima quanto uno vo
ma non mai zero assoluto, nel qual caso vi ha il perfetto parallelismo
delle linee $AS$, $HC$; siami lecito confermare ciò nel seguente modo
Rappresenti $MON$ una iperbola, ed il quadrato $ABBC$ sia la potenza
questa iperbola, onde la linea $ABQZ$ sarà l'assintoto. Il lato $BB$ di

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe
Calandrelli Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati



to quadrato sia eguale al raggio AC del dato circolo ADEB: Essendo AG tangente dell' arco AD, ed DE tangente del arco di compimento, sarà costantemente AG. DE = AC. EC; e ritenendo le sue denominazioni sarà costantemente $zy = a^2$. Essendo questa equazione come riflette saggiamente equazione all' iperbola, e rappresentando BD lato del quadrato ACBD, il raggio o tangente di 45°, se si prenda PQ, parallela a BD, eguale alla tangente DE, sarà AQ eguale alla tangente AG di compimento. Le semiordinate adunque consimili alla PQ, e le ascisse corrispondenti AQ rappresentano tutte le tangenti possibili da 45° fino a 90°: Ma la tangente di 90° non si averà quando PQ, o vero DE sia ridotta al zero assoluto; mentre in questo caso l' assintoto AN toccarebbe la curva, il che ripugna; ma bensì quando PQ sarà divenuta infinitamente piccola nel qual caso QA sarà infinita; come realmente deve essere la tangente di 90°.

Le cose fin qui dette dimostrano, che se la tangente z di 90° si esprima $\frac{a}{0}$ il denominatore 0 non sarà zero assoluto ma relativo, onde in questo caso la frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$; come ben mi concede sarà sempre immaginaria essendo z infinito relativo. Io non so comprendere quale altro infinito si possa concepire parlandosi di quantità, fuori dell' infinito relativo. Per quantità si intende tutto ciò, che è capace di incremento, o decremento; una quantità dunque infinita; prendendo l' infinito nel senso de' Metafisici; ripugna all' essere di quantità; mentre non potendo ricevere incremento, non sarà quantità. So bene prendersi da molti $\frac{a}{0}$, allorchè il denominatore è zero, per infinito assoluto: ma domando quale sarà il valore di $\frac{na}{0}$ di assoluto; per infinito assoluto: non maggiore essendo $\frac{na}{0}$ doppio di $\frac{a}{0}$: non maggiore essendo di $\frac{\infty a^2}{0}$ non eguale ad $\frac{a}{0}$ essendo infinito assoluto. Sono persuaso, che l' espressione $\frac{a}{0}$ niente esprima, e niente significhi, allorchè il denominatore si ponga zero assoluto. Il zero assoluto non è parte nè aliquota, nè aliquanta di a. Con dividere una quantità per un altra, altro non si fa, che prendere il denominatore per unità, e con questa misurare il numeratore: or dunque come il zero assoluto quale non è unità, nè parte alcuna di a, potrà misurare la quantità? Qui mi sovvengono le riflessioni da me una volta fatte in leggere il libro della Scienza della Natura del P. Gio: Maria della Torre. Per potere comprendere il mistero della creazione dal niente osserva il P. della Torre doversi un effetto prodotto da un Artefice in ragion composta della diretta della abilità, o potenza dell' Artefice, e dell' inversa della materia che si adopra, ed abilità, o potenza Divina $= n$ la materia $\underline{o}$, il tempo $t$. Chiamando adunque la potenza Divina $= n$ la materia $\underline{o}$, il tempo $t$. Chiamando adunque l' effetto della creazione per $\frac{o \cdot n}{t}$, quindi essendo o.n un niente moltiplicato $\frac{1}{t}$ esprime l' effetto della creazione per $\frac{o \cdot n}{t}$, credo, che o.n sia eguale ad un finito, moltiplicato per un infinito assoluto, e si persuade, che $\frac{o \cdot n}{t}$ esprima ottimamente essendo o.n diviso per un finito t un effetto finito della potenza infinita. Calcolando il Mondo, quale altro non è, che un effetto finito della potenza infinita. Calcolando accuratamente, senza entrare in una disputa metafisica, e rilevare se la creazione delle sostanze fatta si sia in tempo, o no, la creazione qual è la creazione delle sostanze, l' effetto della creazione si troverà, che essendo $\frac{o \cdot n}{t} = o \cdot \frac{n}{t} = (1-1) \cdot \frac{n}{t} = \frac{n}{t} - \frac{n}{t} = o$, l' effetto della creazione rimarrà sempre impercettibile nè si potrà esprimere per $\frac{o \cdot n}{t}$. Queste sono le mie riflessioni, quali mi do l' onore proporre al sublime suo discernimento. In attenzione frattanto della sua stimatissima quale mi prometto; con perfetto di ossequio, e di stima mi dico.

Di V. S. Illma Roma 31 8bre 1778

Devotmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli.

tevà $p : 1 :: \sqrt{-1} : \frac{1}{2}$ ... : ma $\frac{1}{2}\pi = 7 \pm 1$; dunque
$p : 1 :: \sqrt{-1}\, l \pm 1 : 2 :: -l \pm 1 = l \pm 1 : \frac{-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$.

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

...mando permissione all'Ill.mo Sig. Abate di soggiungere alquante importanti avvertenze intorno alla sua dottissima ed ingegnosissima Lettera dei 31 8bre.

[illegible] $= a$.

Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Col.mo

...ritrovai di comunicarle una formola finita esprimente gli archi circolari per loro seni, la quale serve a confermare la proporzione fra la circonferenza circolare ed il diametro stabilita da Giovanni Bernoulli.

...ngo il raggio $= 1$, l'arco $= u$, il suo seno $= x$, la semicirconferenza $= p$, ed ho la nota formula $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

...alla l'osservazione essere $\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-1}$, e perciò $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ne proviene $du = \frac{\sqrt{-1}\,.\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Multiplico l'omogeneo di comparazione per $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$, e trovo

$$= \frac{\sqrt{-1}\,.\,dx\,(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})} = \sqrt{-1}\,\frac{\left(\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} + dx\right)}{(\sqrt{x^2-1}+x)}$$, ed integrando

coll'aggiunta della necessaria costante, onde si riferisca $u = 0$ ad $x = 0$, $u = \sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$, formula, che mi dà, quando $x = 0$, $u = \sqrt{-1}\, l1$.

Ma al seno $x = 0$ si riferiscono gli archi $\pm 0, \pm p, \pm 2p, \pm 3p, \pm 4p$ &c.; dunque $l1 = \frac{\pm 0}{\sqrt{-1}}, \frac{\pm p}{\sqrt{-1}}, \frac{\pm 2p}{\sqrt{-1}}, \frac{\pm 3p}{\sqrt{-1}}$ &c.

Avuto riguardo alla equazione $p = \sqrt{-1}\, l1$, troveremo $p : 1 :: \sqrt{-1}\, l1 : 1 :: l1 : \frac{-1}{\sqrt{-1}}$; e perchè $-l1 = l\frac{1}{1} = l1$, e $\frac{-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$; si concluderà essere $p : 1 :: l1 : \sqrt{-1}$.

...considerò ora l'equazione $2p = \sqrt{-1}\, l1$, a cui si potrà $p : 1 :: \sqrt{-1}\,.\,\frac{1}{2}l1 : 1$; ma $\frac{1}{2}l1 = l\pm 1$; dunque $p : 1 :: \sqrt{-1}\, l\pm 1 : 1 :: -l\pm 1 = l\pm 1$ [illegible] $\frac{-1}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$.

346

Se si fosse usata la formola $-p=\sqrt{-1}\,l1$, o sia $p=-\sqrt{-1}\,l1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,l1$, si sarebbe trovato $p:1::l1:\sqrt{-1}$.
Adoperando l'equazione $-2p=\sqrt{-1}\,l1$, ovvero $p=-\sqrt{-1}\cdot\frac{1}{2}l1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}\cdot l\pm1$, ne risulterebbe l'analogia
$p:1::l\pm1:\sqrt{-1}$.

Nella formola $u=\sqrt{-1}\,l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$ si ponga il seno $x=\pm1$, a cui si riferisca l'arco $u=\pm\frac{1}{2}p$: Avremo dunque $\pm\frac{1}{2}p=\sqrt{-1}\,l\frac{\pm1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}\,l\mp\sqrt{-1}$, e perciò $p=\pm\sqrt{-1}\cdot2\,l\mp\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}\,l-1$. Quindi ne dedurremo l'analogia $p:1::l-1:\frac{\pm1}{\sqrt{-1}}=\mp\sqrt{-1}$, o sia $p:1::\pm l-1:\sqrt{-1}$: ma $\pm l-1=l-1$; dunque $p:1::l-1:\sqrt{-1}$, che concorda colla proporzione stabilita dal Bernoulli.

Quando $x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ abbiamo $u=\pm\frac{1}{3}p$, e sostituiti questi valori nella formola generale ci si presenta $\pm\frac{1}{3}p=\sqrt{-1}\,l\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}}\right)$, e quindi $p=\pm\sqrt{-1}\cdot3\,l\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}}\right)=\pm\sqrt{-1}\,l\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}}\right)^3$. Ora fatti i necessarj calcoli $\left(\frac{\pm\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}}\right)^3=-1$; dunque $p=\pm\sqrt{-1}\,l-1$, e passando all'analogia $p:1::\pm\sqrt{-1}\,l-1:1::\mp l-1:\frac{-1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$, e poichè $\mp l-1=l-1$; $p:1::l-1:\sqrt{-1}$, come sopra.

imando permissione all' Ill.mo Sig. Abate di soggiun=gere alquante importanti avvertenze intorno alla sua dottissima, ed ingegnosissima Lettera dei 31. Xbre.
[illegible] $z = \infty$.



tto al paragone presentemente colla formola, che le ho communicata, quella ch'è stata determinata dal Co. Vincenzo mio fratello esprimente per le tangenti $z$ gli archi di circolo, cioè a dire $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, nella quale egli nega, che posto $z$ trascendentemente infinito, fosse $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$. Averemo pertanto $u = \sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$,
e conseguentemente $2\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$.
Suppongasi $u = \frac{1}{2}p$, a cui si riferisce $x = 1$, $z = \infty$, e si scoprirà $2\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$: ma $2\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l{-1}$; dunque $l{-1} = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, e finalmente $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$; il che &c.

le è dunque vera la proporzione $p : 1 :: l{-1} : \sqrt{-1}$ scoperta da Giovanni Bernoulli, la quale per altro si può dinotare anche per $p : 1 :: l1 : \sqrt{-1}$, essendo per lo stesso Autore $l1 = l{-1}$.

Il Sig.r Ab. Calandrelli ha molto gradito le mie osservazioni, ed ancor egli cerca ragioni per sostenere $\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}} = -1$, le quali benché non poter essere fratello, io non posso interessatissimo per mio la grazia sua, e si ammettere. Mi conservi la grazia sua, e si degni di considerarmi. Di V.S. Ill.ma

Treviso 9 Xbre 1776

Ill.mo Sig. Canonico M.r Caldani
Roma

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

3

345

[Do]mando permissione all'ornat.mo Sig. Abate di soggiungere alquante importanti avvertenze intorno alla sua dottissima, ed ingegnosissima Lettera dei 31. 8bre.

Nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l\left(\frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}\right)$ faccio $z = \frac{a}{n}$, e trovo $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{n}{n} \cdot \frac{-a^2 - na^2\sqrt{-1}}{a - a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l \frac{n}{n} \cdot -a \cdot \frac{1+n\sqrt{-1}}{1-n\sqrt{-1}}$.

Assegnato ad $n$ qualsivoglia valore positivo, o negativo anche minimissimo, abbiamo sempre $\frac{n}{n} = 1$, e quindi nel nostro caso esser deve $\frac{0}{0} = 1$. Ed in fatti quale è il luogo geometrico della assissa $n$, e della ordinata $\frac{n}{n}$?

egli è certamente una linea retta 7D parallela all'asse eC, e distante dallo stesso per l'intervallo $AB = 1$. Per quanto minimissima sia l'assissa positiva $AC = n$, e negativa $Ae = -n$, saranno sempre le ordinate $CD = \frac{n}{n} = 1$, $e7 = \frac{-n}{-n} = 1$, e quindi per la legge di continuità all'assissa $n = 0$ dovrà corrispondere l'ordinata $AB = \frac{n}{n} = \frac{0}{0} = 1$. Essendo dunque indubitatamente nella presente circostanza $\frac{n}{n} = \frac{0}{0} = 1$, avremo $u = \frac{\sqrt{-1}}{2} l{-a} = \frac{\sqrt{-1}}{2} l{-1}$, e perciò essendo $\frac{1}{4}p = \frac{\sqrt{-1}}{2} l{-1}$, facilmente [ne] dedurremo la legge stabilita da Giovanni Bernoulli.

[Non] negare, che annullandosi congiuntamente le due grandezze $x$, $y$ componenti la frazione $\frac{x}{y}$, sia $\frac{0}{0} = \begin{cases} \infty \\ a \\ \frac{1}{\infty} \end{cases}$ secondochè la ragione di $x : y$ è maggiore

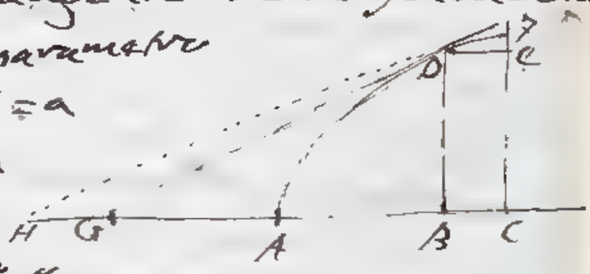
[illegible]

[D]ella sua risposta al dubbio, di quelle ampliando la ricerca. Anche a me pare quel S.r Pyscur, da quel che si rilieva del Caldani, un uomo sgarbato. Mi dispiace che l'Ab.te [illegible] si abbia associato con Lui in certa sua nota nell'elogio

306 34 350

maggiore di qualunque data, o data, o minore di qualunque data nell'atto ch'esse grandezze sono per annullarsi, egli è lo stesso che il totalmente distruggere il famoso, ed utilissimo metodo delle flussioni del Newton. Il detto metodo suppone le minime quantità $dx$, $dy$ sempre fluenti talmente che vadano finalmente a terminare nel nulla. Da questa supposizione dipende la geometrica esattezza del metodo, il quale sarebbe soltanto di approssimazione, quando a $dx$, $dy$ si assegnassero due relativi valori costanti anziché continuamente fluenti.

Illustrerò questa verità sciogliendo, in un caso particolare, il problema, che determina la sottotangente della parabola conica $ADZ$, il cui parametro $= a$. All'ascissa $AB = a$ si riferisce l'ordinata $BD = a$, e ben sanno i geometri, che condotta al punto $D$ la tangente $DG$, taglia questa la suttangente $BG = 2a$. Si segni $BC = x$, e ~~condotta~~ tirata l'ordinata $CZ$, e $De$ parallela a $BC$, pongo $eZ = y$. Per l'equazione della parabola abbiamo $a^2+ax = a^2+2ay+y^2$, e per conseguenza $ax = 2ay + y^2$, o sia $x = 2y + \frac{y^2}{a}$. Si inferisca essere $y : x = 2y + \frac{y^2}{a} :: 1 : 2 + \frac{y}{a}$.




Supponendo

Supponendo la linea $CD = y$; $DC = x$ non solo minime ma fluenti, e tendenti al nulla, per rinvenire la sottotangente, il metodo Newtoniano si serve dell'analogia $FC : CD :: DB : BH$

$$1 : \frac{n+y}{a} :: a : na+y,$$

la quale determina $BH = BG + GH = na + y$.
Se le rette $CF$, $DC$ fossero infinitesime, ma non fluenti, ne proverebbe la suttangente $BH$ infinitamente prossima alla vera $BG$, sopra di cui crescerebbe per $GH = y$; dimodochè si otterrebbe l'adequazione, ma non l'esattezza geometrica. Che se $CF$, $DC$ si considerano come fluenti, la loro proporzione si accosta sempre più a quella di $1 : n$, secondochè vanno scemando, e finalmente ad essa si attengono nell'atto di annullarsi. Nel caso particolare adunque, che abbiam per le mani, $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = \frac{1}{n}$, e la suttangente $BG = na$ geometricamente, e non per adequazione. Dalla proprietà essenziale pertanto, che le quantità infinitesime siano fluenti verso del nulla dipende la perfezione e la geometrica esattezza dell'eccellente metodo Newtoniano.

[Ag]giunge una nuova dimostrazione, che nella formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{n} l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, quando $u = \frac{1}{n}p$, $z = \infty$, abbiamo $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$. Nel circolo del raggio $= 1$ sia $= x$ il seno dell'arco $= u$, e si avrà la

[illegible]

[illegible] non [illegible] [illegible] [illegible]. [illegible] [illegible]
[illegible] ella ha risposto [illegible] dubbio, [illegible] [illegible] [illegible] la [illegible]
[illegible]. Anche a me pare quel S.r [illegible], [illegible] quel che si rileva
[illegible] Caldani, [illegible] [illegible] [illegible]. Mi dispiace che l'Ab.[illegible] [illegible]
[illegible] abbia [illegible] con Lei in certo [illegible] [illegible] nell'[illegible]

nota formola $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Dalla l'osservazione essere $\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-1}$, e perciò $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ne proviene $du = \frac{\sqrt{-1}\cdot dx}{\sqrt{x^2-1}}$. Moltiplico l'omogeneo di comparazione per $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$, e trovo $du = \frac{\sqrt{-1}\,dx\,(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})} = \sqrt{-1}\,\frac{\left(\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}+dx\right)}{(\sqrt{x^2-1}+x)}$, e integrando coll'aggiunta della necessaria costante, onde si riferisca $u=0$ ad $x=$ $u = \sqrt{-1}\; l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)$. Messa al paragone questa formola coll'altra $u = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, trovo $u = \sqrt{-1}\; l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{2}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, e per conseguenza $2\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$. Suppongasi $u = \frac{1}{2}p$ quarta parte della circonferenza, a cui si riferisca $x = 0$, $z = \infty$, e si scoprirà $2\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$; ma $2\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l-1$; dunque $l-1 = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, e finalmente $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -1$, quando $z = \infty$; il che

La settimana ventura le spedirò l'esame da me fatto del metodo, con cui il Eulero determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato reale o immaginario, positivo o negativo. Ed intanto assoggettando quanto ho scritto al purgatissimo suo giudicio, con pieno ossequio mi rassegno

Di V.S. Ill.ma

Treviso 13 9bre 1774.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Sig.r Co. Ab. Sig.re e Prone Riv.mo                                   355

353

Ill.e Caro Sig.re e Prone Stimatissimo                    Bologna 17 8bre 1778

Il non avere ier l'ordinario risposto alla cortese pari è stato
il tempo che la stimatissima sua delli 6 d.to non fosse ricapitata ...
nel tempo in cui vengono, e partono queste lettere, e l'arrivo
del giovedì con le lettere di Roma, e conseguenza che non
è stato più in tempo, che oggi, di rispondere. Dico dunque
che ho provveduto subito il lib.o delle Instituzioni ordinato-
mi, ed ho incaricato il librajo a spedirlo, e lo spedisce questa
sera col corriere a Padova a quel S.r Giuseppe Comino di
lei; m'ho veduto di lasciare questa occasione perchè da
Padova a Treviso debbono essere frequenti gl'incontri, e
l'avrà subito avere. Quando il librajo non faccia qual-
che spesa nella spedizione, che ora non so, il costo
del libro segnerò in mio cred.to £ 35 di questa moneta,
essendo avendone detto che si vende.

La dissertazioncella del P. Caldani al Pessuti l'ho veduta
che egli stesso me la mandò. A me pare che dica bene,
ma non ho veduto originalmente le riflessioni del Pessuti.
Se ella ha risposto m.to dubbio, m'avvisa anzi intorno la mate-
ria. Anche a me pare quel S.r Pessuti, da quel che si rileva
dal Caldani, un uomo sfrontato. Mi dispiace che l'Ab.e Mazzi
ci abbia associato con Lei in certa sua nota nell'elogio

306 34 352

3

nota formola $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Fatta l'osservazione esser $\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-1}$, e perciò $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ne proviene $\ast - \sqrt{-1}\,dx$. Moltiplico l'omaggio di comparazione

del Cavaliere; ma io sto qui tanto poco in questo [illegible] che non mi son dato nemmeno la pena di scrivere una riga a [illegible].

La ringrazio sempre della sua gentile espressione, alla quale io non so dire altro che ella ha qui una persona che pone a disposizione libera di lei tutto ciò che le occorra. Troppe sono le obbligazioni che professo a [illegible] la bontà della Casa, e specialmente ella sempre onorando e [illegible] memoria del [illegible] con quale sentimento sarò fin che viva

Di Lei P. [illegible] Lauro

Div.mo ed Obbl.mo [illegible]
[illegible]

Sig.r Co. Ab. Sig.ra a Svona Rimo 

306 34 352

nota formola $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Fatta l'osservazione esser

$\sqrt{-1}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2-1}$, e perciò $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ne proviene

e $-\sqrt{-1}\,dx$. Notabile l'omissione di comparizione

Al Nobil Uomo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati
Venezia
Treviso

spedisca Sig.r Co. Ab. P.rone Riv.ma due Volumi contenenti
il mio Trattato di Contrappunto, nel primo dei quali
troverà una mostra di caratteri musici, la cui forma
sono possedute in Bologna dal Sig.r Petronio Dalla Volpe,
che vende i caratteri a chi ne vuol fare acquisto. Il
Co. Francesco mio fratello ha tenuto discorso col Sig.r Giu-
seppe Remondini intorno all'edizione della mia
Opera, ed egli si è mostrato inclinato ad intraprenderla,
soltanto che gli venisse indicato il luogo ove potesse
provvedersi dei caratteri musici. Scrissi dunque tosto
al Sig.r Giacomo Marescotti, che mi inviò la mentovata
una mostra di caratteri, che si vendono dal Sig.r Dal-
la Volpe. Rimossa la difficoltà proposta dal Sig.r
Remondini, mi prendo il coraggio di supplicare il
Sig. Co. Ab. a maneggiare questo affare col Sig.r Giu=
seppe, ed Ella ha tanta bontà per me, che ben mi
confido, che mi vorrà favorire. Codesta Stamperia
è fornita di buoni Caratteri, e quando Ella volesse
prendersi l'incomodo di dare una revista all'ultima
correzione, l'edizione riuscirebbe perfetta. Per la
correzione degli esempi musici ci vorrebbe un Uomo
intelligente, il quale per altro, senza prendersi alcun
arbitrio, avesse l'unica mira, che la stampa riuscisse
conforme all'originale. Dico questo, perchè sopra
dei

$1+\frac{y}{n} = x^n$, ed alzando alla potestà n, $(1+\frac{y}{n}) = x$,
e finalmente $(1+\frac{y}{n})^n - x = 0$.
Fin qui Ella tutto accorda; ma nega poi, che per deter=
minare tutti i logaritmi di 1 possa supporre $x = 1$;
imperciocchè ne seguirebbe essere $(1+\frac{y}{n})^n = (1+i)^n = 1$.
il

dal Bassirio scrivo spesso dei numeri diversi da qual
che si usano comunemente, nè vorrei che mi acca
desse quello, ch'è successo al Sig.r Tartini, che un
Maestro ha cangiati nei Bassi i numeri, credend
malamente scritti dai Copisti. Io ben comprend
di aver gittate le mie lunghe fatiche, se la mia Op
non si stampa mentre ancora V.S. Ill.ma Signore mi
serva in vita. La prego dunque di assistermi in
questo affare, che non può essere meglio appogg
quando Ella condiscenda a graziarmi. Scusi, con
la supplica, la soverchia libertà che mi prendo, e
offerendomi a' pregiatissimi suoi comandi, con
piena stima e rispetto ho l'onore di sottoscrivermi

Di Lei Sig.r Co. Ab. Sig.re e Padrone Riv.

Castelfranco 16 9bre 1776

Nob. Sig.r Co. Ab. Giambatista Roberti. Bassano.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

$1+\frac{y}{n} = x^n$, ed alzando alla potestà n, $(1+\frac{y}{n}) = x$,
e finalmente $(1+\frac{y}{n})^n - x = 0$ [illegible]
in qui ella tutto accorda; ma nega poi, che per deter-
minare tutti i logaritmi di 1, possa supporre $x = 1$;
imperciocchè non seguirebbe essere $(1+\frac{y}{n})^n = (1+i)^n = 1$
[illegible]

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron.e Col.mo

Per obbedire ai pregiatissimi suoi comandi, mi sono posto ad esaminare posatamente il metodo, con cui il celebre Eulero determina tutti i logaritmi di qualunque numero dato, reale o immaginario, positivo o negativo. Nella supposizione del lodato Scrittore, che il proto numero, o la suttangente sia uguale all'unità, e che $i$ sia una infinitesima grandezza, egli è infallibile avverarsi l'equazione $l(1+i) = i$. Dipende ciò dalla nota proprietà della logistica, che richiede costante la suttangente, che nel nostro caso uguagliasi all'unità: ma la suttangente generalmente si esprime per $\frac{x\,dy}{dx}$; dunque $\frac{x\,dy}{dx} = 1$, e posto il numero $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 1$, e quindi $dy = dx$. Facciasi $dy = dx (= i)$, e si supponga, che al logaritmo $i$ ci corrisponda il numero $1+i$, e perciò $l(1+i) = i$; il che ec. Da questa equazione ottimamente deduce l'Eulero $n\,l(1+i) = ni = l(1+i)^n$. Mette di poi $(1+i)^n = x$, e chiamato $y$ il logaritmo di $x$ ne inferisce $y = lx = l(1+i)^n = ni$. Ora essendo $(1+i)^n = x$, sarà $1+i = x^{\frac{1}{n}}$, ed $i = x^{\frac{1}{n}} - 1$: ma $y = ni$; dunque $y = nx^{\frac{1}{n}} - n$, ovvero $n+y = nx^{\frac{1}{n}}$, e dividendo per $n$, $1+\frac{y}{n} = x^{\frac{1}{n}}$, ed alzando alla potestà $n$, $(1+\frac{y}{n})^n = x$, e finalmente $(1+\frac{y}{n})^n - x = 0$.

Fin qui tutto accordasi: ma nego poi, che per determinare tutti i logaritmi di $x$, possa supporre $x = 1$; imperciocchè ne seguirebbe essere $(1+\frac{y}{n})^n = (1+i)^n = 1$;

il

306 34

358

il che ripugna per lo stesso Eulero, il quale volendo i quantità minima, dee necessariamente concedere, $1+i$ alzata alla potestà infinita $n$ sia maggiore dell'unità. L'assicuro, che questa valida opposizione mi ha dato molto da pensare, e dopo varie meditazioni finalmente mi lusingo di aver trovata la maniera di scioglierla.

E primieramente si supponga sempre costante la grandezza minima $= i$, è chiaro si scopre, che in tale ipotesi il valore di $n$ ha da cominciare dal nulla, e da progredire verso l'infinito per la serie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ &c. In fatti: presa sotto gli occhi la formola $(1+i)^n = x$, se $n = 0$, avremo $(1+i)^0 = x = 1$; se $n = 1$, $1+i = x$; se $n = 2$, $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = x$ &c. Nella detta supposizione adunque, quando si fa $x = 1$, bisogna necessariamente mettere $n = 0$, onde l'equazione generale $(1+i)^n = x$ prende il seguente aspetto $(1+i)^0 = 1$, che s'accorda col vero.

Si supponga in secondo luogo $n$ costantemente uguale allo stesso infinito, il che conviene con ciò che pensa l'Eulero, il quale vuole $n$ infinito anche quando fa $x = 1$. Se la infinitesima $i$ mantenesse sempre il medesimo valore, riuscirebbe invariabile la grandezza di $x = (1+i)^n$ contro la natura della logistica. Egli è dunque necessario nella nostra seconda supposizione, che la minima $i = \frac{y}{n}$ cominci dal nulla quando $x = 1$, e vada gradatamente crescendo, secondochè $x$ diventa maggiore dell'unità. In tal guisa, ad $y = 0$ corrisponderà

corrisponderà $i=0$; ad $y=1$, $i=\frac{1}{n}$; ad $y=2$, $i=\frac{2}{n}$ &c.
per la qual cosa rettificata a dovere la idea dello Autore, svanisce lo assurdo, che Ella pensava di aver trovato nella equazione $(1+\frac{y}{n})^n = x$, quando $x=1$; imperciocchè in tal incontro giustamente si trova $\frac{y}{n} = i = 0$.

Trovata giusta la formola $(1+\frac{y}{n})^n - x = 0$, pongo $1+\frac{y}{n} = z$, $x=1$, onde si abbia $z^n - 1 = 0$:
Dimostra il nostro profondo Autore, che tutti i fattori trinomiali possibili della funzione $z^n - 1 = 0$ si contengono nella equazione $z^2 - 2z\,Co.\frac{2\lambda p}{n} + 1 = 0$, nella quale $p$ significa la semicirconferenza circolare del raggio $=1$, ed $\lambda$ qualunque numero della serie 0, 1, 2, 3, &c.
Avremo pertanto $z^2 - 2z\,Co.\frac{2\lambda p}{n} + Co.\frac{2\lambda p}{n}^2 = Co.\frac{2\lambda p}{n}^2 - 1$: ma $1 = Co.\frac{2\lambda p}{n}^2 + Se.\frac{2\lambda p}{n}^2$; dunque $z^2 - 2z\,Co.\frac{2\lambda p}{n} + Co.\frac{2\lambda p}{n}^2 = -Se.\frac{2\lambda p}{n}^2$, ed estraendo la radice $z - Co.\frac{2\lambda p}{n} = \pm Se.\frac{2\lambda p}{n}.\sqrt{-1}$. Ora $z = 1+\frac{y}{n}$, $Co.\frac{2\lambda p}{n} = 1$, $Se.\frac{2\lambda p}{n} = \frac{2\lambda p}{n}$; dunque effettuata la sostituzione $\frac{y}{n} = \pm\frac{2\lambda p}{n}\sqrt{-1}$, e per conseguenza $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. Quindi i valori di $y = l1$ ridotti in serie saranno
$y = l1 = 0, \pm 2p\sqrt{-1}, \pm 4p\sqrt{-1}, \pm 6p\sqrt{-1}$ &c.
Ponendo $x = -1$ si scoprirà il binomio $z^n + 1 = 0$, i cui fattori trinomiali secondo la dimostrazione dello Autore sono compresi nella formola $z^2 - 2z\,Co.\frac{2\lambda + 1 . p}{n} + 1 = 0$.
Perciò sarà $z^2 - 2z\,Co.\frac{2\lambda + 1 . p}{n} = -1$, e supplendo il quadrato

360

quadrato, e ponendo in cambio di $i$ il suo valore $\left(Cc.\frac{2\lambda-1}{n}.p + Sc.\frac{2\lambda-1}{n}.p\right)^2$, ci si presentava $z^2 - 2z\,Cc.\frac{2\lambda-1}{n}.p + \left(Cc.\frac{2\lambda-1}{n}.p\right)^2 = -\left(Sc.\frac{2\lambda-1}{n}.p\right)^2$. Estratta la radice troveremo $z - Cc.\frac{2\lambda-1}{n}.p = \pm Sc.\frac{2\lambda-1}{n}.p$ e poichè $z = 1+\frac{y}{n}$, $Cc.\frac{2\lambda-1}{n}.p = 1$, $Sc.\frac{2\lambda-1}{n}.p = \frac{2\lambda-1}{n}$ ne proverrà $\frac{y}{n} = \pm\left(\frac{2\lambda-1}{n}.p\right)\sqrt{-1}$, e finalmente $y = \pm(2\lambda-1.p)\sqrt{-1}$. Ci somministra questa formola i seguenti valori di $y$ disposti in serie $y = l{-1} = \pm p\sqrt{-1}, \pm 3p\sqrt{-1}, \pm 5p\sqrt{-1}$ ecc.

E qui il Eulero crede di aver convinta di falsità la sentenza di Giovanni Bernoulli, il quale sostenéva, che due numeri eguali, uno positivo, e l'altro negativo sono forniti dai medesimi logaritmi; imperciocchè dai logaritmi di $+1$ sono diversi quelli di $-1$. Di più l'unità negativa non ammettendo verun logaritmo reale, ciò prova ad evidenza essere nella logistica immaginario il ramo dei numeri negativi.

La ragione starebbe dal canto dell'Eulero, se la sua soluzione fosse compiuta. In quella guisa che ho dimostrato $l(1+i) = i$, parimente si vedeva $l(-1-i) = i$, e per conseguenza $l(-1-i)^n = ni$. Quindi, se abbiasi l'equazione $lx = y$, posto $(-1-i)^n = x$, $ni = y$, nascevano le due formole $i = -x^{\frac{1}{n}} - 1$, $i = \frac{y}{n}$, e da queste la terza $-x^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{y}{n}$, che ne dà $x = \left(-1-\frac{y}{n}\right)^n$. Se $n$ sia numero dispari, il che m'è concesso di

supporre

n. 381

supporre, avremo $x = -(1+\frac{y}{n})^n$, e per ciò $(1+\frac{y}{n})^n + x = 0$.
Se adunque si fa $x = 1$, si avrà $(1+\frac{y}{n})^n + 1 = 0$, e se si fa $x = -1$, ne nascerà $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$.
Aggiungendo pertanto insieme la soluzione dell'Eulero, e l'estensione, ch'io le ho data, apertamente si vede che i binomj $(1+\frac{y}{n})^n \mp 1 = 0$ egualmente convengono alle due supposizioni $x = 1$, $x = -1$, e che perciò $lx = 0$, $\pm p\sqrt{-1}$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$ &c. E quindi si inferisce che la soluzione dell'Eulero ridotta compimente darà a favore del Bernoulli la famosa controversia dei logaritmi dei numeri negativi.

Egli ora asciogliere la difficoltà, che alla dettamente propone. Posto $Cs.\frac{2\lambda p}{n} = 1$, avremo $z^2 - 2z\,Cs.\frac{2\lambda p}{n} + 1 = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0$ in della ipotesi.
Il trinomio adunque non potrà essere $= 0$ senon quando $z = 1+l = 1$, e per conseguenza $l = 0$, il che mostra soltanto $l1 = 0$, esclusi tutti gli altri valori. Questo in fatti è il valore di $l1$, al quale per altro, se ne uniscono infiniti immaginarj nascenti. Dee riflettere essere $1 = Cs.\frac{2\lambda p}{n} + Sn.\frac{2\lambda p}{n}$, onde si abbia $z^2 - 2z\,Cs.\frac{2\lambda p}{n} + Cs.\frac{2\lambda p}{n} = -Sn.\frac{2\lambda p}{n}$, ed indi $z - Cs.\frac{2\lambda p}{n} = \pm\sqrt{-1}\,Sn.\frac{2\lambda p}{n}$, e per le cose sopra fatte $y = \pm 2\lambda p\sqrt{-1}$. Ha ottimamente fatta la riflessione [illegible] stimatissimo Sig.r Abate, che il collocava l'unità in cambio di $Cs.\frac{2\lambda p}{n}$ nella equazione $z^2 - 2z\,Cs.\frac{2\lambda p}{n} + 1 = 0$, egli è un tralascia-

te

3 6n

ta supporre che sia Sc. $\frac{2\lambda p}{n} = 0$, e per conseguenza $\lambda = 0$. In tal caso adunque soltanto potrò usare della sostituzione, e ricavarne $z - 1 = 0$, e surrogato il valore di $z$, $1 + \frac{y}{n} - 1 = \frac{y}{n} = 0$, e finalmente per la soluzione della [illegible] pliata $y = f \pm 1 = 0$, che è il valore reale di $f \pm 1$.

Ma quando $\lambda = 1, 2, 3, 4$ &c. la mentovata sostituzione conduce all'errore, e per evitarlo fa di uopo collocare nella formola $z^2 - 2z\,Cc.\frac{2\lambda p}{n} + 1 = 0$ in vece dell'unità superficiata il suo valore $\overline{Cc.\frac{2\lambda p}{n}}^2 + \overline{Sc.\frac{2\lambda p}{n}}^2$, onde fatte le debite operazioni si avrà $z - Cc.\frac{2\lambda p}{n} = \pm\sqrt{-1}\,Sc.\frac{2\lambda p}{n}$; e ponendo in luogo di $z$ il suo valore, e trasportando convenientemente i termini, $\frac{y}{n} = Cc.\frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm \sqrt{-1}\,Sc.\frac{2\lambda p}{n}$. Ma $Cc.\frac{2\lambda p}{n} - 1$ è una quantità infinitesima del secondo grado, la quale svanisce posta al confronto con $Sc.\frac{2\lambda p}{n}$ grandezza infinitesima del primo grado; dunque $\frac{y}{n} = \pm\sqrt{-1}\,Sc.\frac{2\lambda p}{n}$, e poiché $Sc.\frac{2\lambda p}{n} = \frac{2\lambda p}{n}$, $\frac{y}{n} = \pm\sqrt{-1}.\frac{2\lambda p}{n}$, e per ultimo $y = f \pm 1 = \pm\sqrt{-1}.2\lambda p$.

La stessa cautela bisogna usare anche nel maneggio della formola $z^2 - 2z\,Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n} + 1 = 0$. Avendo di sopra trovato $z - Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n} = \pm\sqrt{-1}\,Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n}$, e sostituito il valore di $z = 1 + \frac{y}{n}$, e trasportando i dovuti termini, scoprirassi $\frac{y}{n} = Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n} - 1 \pm \sqrt{-1}\,Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n}$. Fatta anche qui l'avvertenza, che $Cc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n} - 1$ è una quantità minima del secondo grado, la quale può trascurarsi rispettivamente a $Sc.\frac{\overline{2\lambda-1}.p}{n}$ grandezza

363

grandezza minima del primo grado, giungeremo finalmente alla espressione $y = l \pm r z \pm \sqrt{-1}\, r z k^{-1} p$ anche esaminato da tutti i lati il metodo dell'Eulero, io lo trovo giustissimo, nulladimeno io non debbo lasciare senza scioglimento il proseguimento della ~~una forte~~ obbiezione, che Ella contro gli muove. Fatto havea $\frac{n \lambda p}{k} = \varphi$, risolve il trinomio $z^2 - 2z\, Cc.\varphi + 1 = 0$ nei due fattori $1 - z\cdot(Cc.\varphi + \sqrt{-1}\, Sc.\varphi)$, $1 - z\cdot(Cc.\varphi - \sqrt{-1}\, Sc.\varphi)$, ed ultimamente afferma, che se il trinomio è $= 0$, o tutti e due i fattori, o almeno un di loro hanno da agguagliare il nulla. Se $Sc.\varphi = 0$, e $Cc.\varphi = 1$, e l'uno e l'altro fattore mi dà $1 - z = 0$, e sostituito il valore di $z$, $y = l \pm 1 = 0$.

posto che non sia $Sc.\varphi = 0$, se fingo $= 0$ il primo fattore trovo $1 = z\cdot(Cc.\varphi + \sqrt{-1}\, Sc.\varphi)$, e se voglio che si annulli il secondo fattore, mi si presenta $1 = z\cdot(Cc.\varphi - \sqrt{-1}\, Sc.\varphi)$, ed in tutti e due i casi incontro l'assurdo che l'unità reale pareggi una quantità immaginaria.

veramente $z\cdot(Cc.\varphi \pm \sqrt{-1}\, Sc.\varphi)$ fosse grandezza immaginaria, quando non è $Sc.\varphi = 0$, il metodo dell'Eulero sarebbe convinto di falsità. Ella frattanto è supplicata di osservare, che nella predetta ipotesi $z = k^{Cc.\frac{n\lambda p}{k}} \mp \sqrt{-1}\, Sc.\frac{n \lambda p}{k}$ è quantità immaginaria, e che moltiplicandola per l'altra quantità immaginaria $Cc.\varphi \pm \sqrt{-1}\, Sc.\varphi$, ne risulta il prodotto reale $= 1 = Cc.\varphi \mp \sqrt{-1}\, Sc.\varphi \cdot Cc.\varphi \pm \sqrt{-1}\, Sc.\varphi$.

Svanisce dunque l'obbiezione proposta, e resta confermato il metodo del rinomatissimo Eulero. Prima di communicare al Pubblico la sua Memoria,

esamini

306 34

304

esamini quanto ho scritto, che sempre sottopongo al purgatissimo suo giudizio, e suo fino discernimento per cui professo quella grandissima stima, che mi obbligherà sempre quanto ho l'onore di protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Divotiss.mo Obblig.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe
Calandrelli. Roma

Ill.mo Sig.r Conte Pron.e Stim.o 

...itrovato un po d'ozio, avevo ripreso in mano le dissertazioni manda-
...ui da V. S. Ill.ma per leggerle con qualche attenzione. Ma ho
...eduto, che fuori di quella tavola di figure, che appartiene
...lle due ultime lettere in cui si tratta delle corde, mancano
...utte le altre figure, che spettano alle precedenti de' logaritmi.
...o sperato di poterle trovare in campagna dimenticate in uno
...ssetto da tavolino, ove avevo riposto tutto lo scritto, ma inuti-
... è stata la ricerca; e mi convien dire, che realmente
...lla non me le abbia mandate. Io la prego dunque di far ricer-
...a fra le sue carte, se per caso ci fossero, e di farmele
...vere, ond'io possa nelle vacanze di Natale servirla, parendomi
...he sia ormai tempo di inviar tutto al suo destino. Ella mi
...erdonerà tutte queste dilazioni in vista delle mie occupazioni,
...he non son poche, perchè qui non s'impiegano, ma si affogano
...i Professori. Intanto con piena stima, e profondo rispetto ho
l'onore di confermarmi

Di V. S. Ill.ma Ferrara li 25 X.bre 1778

Dev.mo Oblig.mo Servitor Vero
F. Franc.o de' Malfatti

[illegible]
la stampa dell' Opera sua, ma di farla unicamente
per tale stampa, dopo la quale la spesa resterebbe
perduta, non avendo egli, nè volendo stampare

306 34 366

[illegible] voi [illegible] = 1 = [illegible]

[illegible] allora [illegible] una [illegible] dunque [illegible]

[illegible] il [illegible]

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe [illegible] e [illegible] Obbl.mo Serv.re

Calandrelli. Roma

Giordano Riccati

gli scrivere convenuto [illegible] spesa apposta per
la stampa dell' Opera sua, ma di farla unicamente
per tale stampa, dopo la quale la spesa resterebbe perduta, non avendo egli, nè volendo stampare

3

[illegible]

Ill.mo Sig. Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Umiliss.mo Devot.mo Obblig.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig. Sig. Pron. Col.mo

...Sig. Conte Giordano e Prone Riv.mo

3-6-?

...ha ricevuto il suo involto [illegible] ... proprie
dal Sig. Conte Giuseppe Romandini ... stesso giorno
... [illegible] ... per trattare, e promuovere
colle vive parole, il negozio; [illegible] parte altre
difficoltà, come ... quella di ... [illegible] che intende
... [illegible] ... egli ... il Conte
Giuseppe nella ragione di non avere i caratteri pro-
prj come diceva al Sig. Conte Francesco, suo fratello, e
... che ella gli suggerisce di comperarli, ed
il luogo dove potrebbe comperarli; ma, a parla-
re ingenuamente, egli non si sente disposto a far
siffatta spesa non indifferente apposta. E di
più ... pregato ad avvertire che non solamente
gli sarebbe convenuto far tale spesa apposta per
la stampa dell'Opera sua, ma di farla unicamente
per tale stampa, dopo la quale la spesa resterebbe
perduta, non avendo egli, nè volendo stampare

306 34

3

264

volumi di note musicali. Come ella vede, o pregiatiss: Sig.
Conte Giordano infinite obligazioni da tavolino mi
rendono impedito, sono assediato da' [illegible] per le mano
sopra altrui. Il Sig. Reverendiss. Riccati cui mi
[illegible] i detti, comincia e spero distinta per la
famiglia, e di un particolare rispetto, per la sua
persona degna della riverenza e dell' amore
di chiunque la conosce, ancorchè possibil fare
onde egli pensa di venire a Castelfranco per
trattarla in persona istesso, e riceverne e giusti-
care a lo [illegible] cavaliere e gentile la
difficoltà. Forse ella potrà persuader ciò che
io non posso, onde resto della mortificazione
di non essere riuscito in un affare raccoman-
datomi dal Conte Giordano Riccati che onoro
amo veramente e di cui sono col più
candido animo devotissimamente

Bassano 25 Novembre 1778. Obbl.mo Aff.mo Ser.e ed A[illegible]
Al Sig. Ornatiss. Sig. Conte e Prone Riccati Giambattista Robe[illegible]

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo

306 34

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron. Col.mo

Fu ivi a mio distintissimo onore l'aver voluto V. S. Ill.ma compiacersi di trasmettermi la sua formola esprimente l'arco circolare riferito al seno, di che le ne rendo le maggiori grazie, che posso. L'andrò osservando, e studiando: io però credo, che se si esprimerà l'arco circolare per qualche altra linea analoga, come il coseno, o la secante si avrà sempre la proporzione fra il diametro, e il circolo già trovata, come dissi da Giovanni Bernoulli, quando si calcoli nella maniera solita. Rifletto intanto, che nella sua formola $2l\frac{1}{\sqrt{-1}}$ paragonata coll'altra $l\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}$ si avrà posto $z=1$ la seguente $2l\frac{1}{\sqrt{-1}}=l-\sqrt{-1}$, ovvero $2l-\sqrt{-1}=l-\sqrt{-1}$, cioè il tutto eguale alla parte: ovvero fatta $z=\infty$ sarà $2l\frac{1}{\sqrt{-1}}=l-\frac{\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}$ equazione, che non può ~~[illegible]~~ mai produrre che sia $2l\frac{1}{\sqrt{-1}}=l-1$ perchè il primo membro è immaginario, e l'altro reale, e perchè non può diventar reale senza dileguarsi $\sqrt{-1}$, che è ciò, che non può farsi. Come se avessi $y=x\sqrt{-1}+a$, e mettessi $x=0$, e quindi deducessi $y=a$

Il Sig.r Ab.e Calandrelli, ch'io non conosco, che di nome pel suo saggio ultimamente pubblicato bisogna, che non sia persuaso non potersi prendere $0\pm\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-1}$ di che per altro son restati persuasi i Sig.ri Zanotti, e Marescotti, che hanno ricevuta, e letta l'ultima mia lettera sopra le riflessioni del Sig.r Pessuti, come pure, che non possa sussistere l'equazione $2l\sqrt{-1}=l-1$. Io vo pensando ad una operazione pel calcolo degl'immaginarj, e de loro logaritmi, e già ne ho fatta alcuna piccola parte. Se lo scritto mi riuscirà di giusta mole, e contenga dimostrati a rigore le cose;

Ill.mo Sig. Ab. Gio Antonio Lecchi
Bologna

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

forse lo stampo; e prima mi rivolgerò a V.S. Ill.ma perchè me ne favorisca il suo sentimento, ch'io stimo, e venero infinitamente. Intanto pregandola di continuarmi l'onore della sua grazia, e delle altre di lei scientifiche produzioni, che andrà mettendo in iscritto o in istampa pieno di obbligazioni, e di ossequio mi protesto

Di V.S. Ill.ma

Roma 25 Nov.re 1776

Umil.mo, ed Obblig.mo Ser.re
Antonio M.o Cald[illegible]

Ill.mo Sig. M.e Gio. Antonio Ledevilla
Bologna

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 3 7 3 9

Ill.mo Sig.re Sig.re P.rone Col.mo 3 7 1

[U]n mese fa incirca inviai a V. S. Ill.ma una lettera da
me scritta al Sig.r Giannini, acciocchè colla solita
sua gentilezza la indirizzasse verso Segovia. Dubitan-
do io, che si sia perduta o la mia lettera, o la sua
risposta, la supplico sopra ciò di qualche notizia;
imperciocchè se la mia lettera non le fosse pervenuta,
sarebbe necessario, ch'io replicassi la risposta al Sig.r
Giannini. Nel detto incontro l'ho pregata altresì di
provedere per mio conto le Esercitazioni Matematiche
di Bonaventura Cavalieri stampate costì nel secolo
passato, postochè le capitassero alle mani. Scusi in
grazia i disturbi, che mi prende il coraggio di re-
carle fondato su quella bontà generosa, con cui mi
riguarda, per cui io mi glorierò sempre di essere
col maggiore rispetto

Di V. S. Ill.ma

Treviso 26 9bre 1778

Ill.mo Sig. Ab. Gio Antonio Redevilla
Bologna

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

306

372

Ill.mo Sig.re Sig.re Padrone Colmo

Ill.mo Sig.r Sig.r Padrone Col.mo 373 9

l Sig.r Ab. Luigi Taotto, che conducendo in Collegio a Siena il Sig.r Contino Spinada dovea passar per Ferrara, consegnai due mesi fa una lettera a Lei diretta con un involtino contenente sei lettere, cinque dell'Ab. Vincenzo, ed una mia sopra i logaritmi dei numeri negativi, e due altre lettere, nelle quali supponendo applicata una penna al punto medio di una corda determino, lasciata che sia in libertà, il tempo impiegato a passare dalla prima posizione alla curva isocrona slanciata o semplice di un ventre solo, o pure composta dalle due semplici di un ventre solo, e di tre. Io la pregava a leggere, e ad esaminare tutte le predette lettere, e poscia a spedirle a Modena al Sig.r Ab. Domenico Troili. Il Sig.r Ab. Taotto si portò alla di lei casa, ma nel caffè vicino gli dissero, che Ella si trovava in villeggiatura col Sig. M.e Bevilacqua, e quindi un Ab. si offerse di ricevere la lettera, e l'involtino, che avrebbe custoditi sintantochè Ella fosse ritornata a Ferrara. Il Sig.r Ab. Taotto adunque consegnò il tutto al detto Ab. alla presenza del caffettiere, e di altri parecchj. Le scrivo tutto questo, perchè se mai l'Ab., di cui non so il cognome, avesse trascurato di recarle la lettera, e l'involto, Ella possa prendere le necessarie informazioni per ricuperare l'una, e l'altro. Io suppongo per altro, che l'Ab.

non

$\sqrt{-1}$, $1$, $\sqrt{-1}$, $-1$, $-\sqrt{-1}$
$\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$

ricaverà la periferia al diametro come $L\cdot 1 : \sqrt{-1}$: dalla seconda come $L\cdot 1 : \sqrt{-1}$: dalla terza, come ... come $L\sqrt{-1} : \sqrt{-1}$. In terzo luogo ... $1 : \sqrt{-1}$ : dalla quarta, come ... teoria distruggesi ... il sistema de' logaritmi de' Sig.ri Eulero, e li Gesuiti; secondo i quali ...

non avrà mancato al suo impegno, ma che Ella sendo
ritornata da non molto in Città, e dovendo attend
alle nuove Lezioni, non abbia avuto tempo di es
minare la lettera; che la ho gradita
Il Sig. Ab. Zisi ha pubblicato un Elogio del Cavalieri p
di invettive contro dei Gesuiti. È bellissimo l'esem
di questo Elogio disteso dal Sig. Ab. Tiraboschi, ed
inserito nel Tomo XIV. del Giornale di Modena
Ella mi conservi la sua pregiatissima grazia, e mi
onori de suoi comandi, onde io possa sempre pi
dimostrarmi

Di V. S. Ill.ma

Treviso 25 9bre 1775

Ill.mo Sig. Gianfrancesco de' Malfatti
Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

| | |
|---|---|
| $\sqrt{-1}$, 1, $\sqrt{-1}$, −1, $-\sqrt{-1}$ | ricaverà per la periferia al diametro |
| $\frac{1}{4}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{3}{4}p$, $p$ | come $L-1:\sqrt{-1}$; dalla seconda se |

vid come $L1:\sqrt{-1}$; dalla terza come
$\sqrt{-1}:\sqrt{-1}$: dalla quarta, come $L\sqrt{-1}:\sqrt{-1}$. In terzo luogo
[illegible] teoria distrugge tutto il sistema de' loga=
ritmi de' signori Eulero, e Jessuti; secondo i quali a mo=

Eccellenza

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Col.mo



...riauro a venire dalle sue promesse alcune sue stima=
tissime relative al paragrafo V del mio Saggio. Mi sarei
fatto pregio rispondere prima d'ora; ma avendomi ciò
impedito un ostinato raffreddore, mi persuado, che la gen=
tilezza del Stimatissimo Sig.r Conte mi scuserà in di ciò.
...arco $u$ trovo, che si possa esprimere per $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{\pm a \pm 2\sqrt{-1}}{a - 2\sqrt{-1}}$;
ponendosi prendere si 1 che $-1$ per protonumero. Questo
modo di raziocinare credo si ristabilisca allo stesso arco $u$
quale supponendosi, che dall'integrazione venga eguale
ad $\frac{a}{2\sqrt{-1}}(l a + 2\sqrt{-1} - l a - 2\sqrt{-1})$; se si prende $1$ per protonumero,
sarà $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a + 2\sqrt{-1}}{a - 2\sqrt{-1}}$; se si prende $-2$ per protonumero,
sarà $\frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{-a - 2\sqrt{-1}}{a - 2\sqrt{-1}}$. Se questo raziocinio vale volendo
il Chiarissimo Sig.r Conte, che anche $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ siano
protonumeri: sarà ancora $u = \frac{a}{2\sqrt{-1}} l \frac{a\sqrt{-1} - 2}{a - 2\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{\sqrt{-1} - 2}{1 - 2\sqrt{-1}}$
secondo i suoi principii. Dunque $u = 0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \sqrt{-1}$, $u = \frac{1}{4}p =$
$\frac{1}{2\sqrt{-1}} l -1$, $u = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l -\sqrt{-1}$, $u = \frac{3}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l 1$, $u = p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \sqrt{-1}$.
Prendendo per protonumero $-\sqrt{-1}$ sarà $u = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{-\sqrt{-1} + 2}{1 - 2\sqrt{-1}}$; onde
$u = 0 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l -\sqrt{-1}$; $u = \frac{1}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l 1$, $u = \frac{1}{2}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \sqrt{-1}$,
$u = \frac{3}{4}p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l -1$, $u = p = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l -\sqrt{-1}$. Essendo dunque i
diversi protonumeri, diverse saranno le serie, quali
qui espongo. La prima, e seconda se=
rie la favore del suo degnissimo
fratello, e di Gio: Bernoulli dimostrerà
incontrovertibilmente contro il Sig.r Eulero
e Gesuiti, essere i Logaritmi delle
quantità positive eguali ai Logarit=
mi delle quantità negative. In
secondo luogo dalla prima serie si
ricaverà la periferia al diametro
come $l-1 : \sqrt{-1}$: dalla seconda se=
rie come $l1 : \sqrt{-1}$: dalla terza, come
$l\sqrt{-1} : \sqrt{-1}$: dalla quarta, come $l\sqrt{-1} : \sqrt{-1}$. In terzo luogo
questa teoria distruggerà tutto il sistema de' Loga=
ritmi de' Sig.ri Eulero, e Gesuiti; secondo i quali il mo=

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $1$ | $\sqrt{-1}$ | $-1$ | $-\sqrt{-1}$ | $1$ |
| $0$ | $\frac{1}{4}p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{3}{4}p$ | $p$ |
| $-1$ | $-\sqrt{-1}$ | $1$ | $\sqrt{-1}$ | $-1$ |
| $0$ | $\frac{1}{4}p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{3}{4}p$ | $p$ |
| $\sqrt{-1}$ | $-1$ | $-\sqrt{-1}$ | $1$ | $\sqrt{-1}$ |
| $0$ | $\frac{1}{4}p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{3}{4}p$ | $p$ |
| $-\sqrt{-1}$ | $1$ | $\sqrt{-1}$ | $-1$ | $-\sqrt{-1}$ |
| $0$ | $\frac{1}{4}p$ | $\frac{1}{2}p$ | $\frac{3}{4}p$ | $p$ |

tivo di esempio z si pone eguale a ∓ p√-1, ∓ p√-1, ∓ p√-1; ne puole essere eguale a $p\sqrt{-1}$, $\frac{3}{2}p\sqrt{-1}$, $\frac{1}{2}p\sqrt{-1}$, ed altri infiniti; come si deduce dalla seconda serie di questa serie. Che poi le quattro esposte formole no, rappresentino l'arco u, basta a riflettere

$$\frac{dz}{1+z^2} = \left(\left(\frac{dz\sqrt{-1} + 2zdz - 2dz - dz\sqrt{-1}}{(1-2\sqrt{-1})\cdot(1-2\sqrt{-1})}\right) : \frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = \left(\left(\frac{-dz\sqrt{-1} - 2dz + 2dz - dz\sqrt{-1}}{(1-2\sqrt{-1})\cdot(1-2\sqrt{-1})}\right) : \frac{-1-2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}\right)\frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = \left(\left(\frac{-dz + 2dz\sqrt{-1} - 2dz\sqrt{-1} - dz}{(1-2\sqrt{-1})\cdot(1-2\sqrt{-1})}\right) : \frac{\sqrt{-1}-2}{1-2\sqrt{-1}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

$$\frac{dz}{1+z^2} = \left(\left(\frac{dz - 2dz\sqrt{-1} + 2dz\sqrt{-1} + dz}{(1-2\sqrt{-1})\cdot(1-2\sqrt{-1})}\right) : \frac{-\sqrt{-1}+2}{1-2\sqrt{-1}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{-1}}$$

La prima formola altro non è che il differenziale di $l\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$ diviso per la stessa quantità $\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$ e moltiplicato tutto per $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$: dunque l'integrale si dovrà esprimere per $\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$. Lo stesso si dica delle altre tre formole, quali facendo le aggiunte della costante si riducono alla prima con prendere per protonumero l'unità, prima $\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$; prendendo per protonumero le rispettive costanti, rimangono le medesime; come è facile vare prendendo -1, $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ per protonumero. Qualunque di queste formole messa alla prova duce ad esattamente determinare la tangente di qualunque arco multiplo, o sottomultiplo di un altro; come ha fatto Gio: Bernoulli, servendosi della comune formola $\frac{1}{2\sqrt{-1}}l\frac{1+2\sqrt{-1}}{1-2\sqrt{-1}}$. Il metodo quale propone per determinare la tangente di qualunque arco $\frac{u}{n}$ si riduce ad un caso particolare del metodo più esteso di Gio: Bernoulli. Da questo metodo quale si trova esposto nelle opere di Bernoulli Tom: I. Num: LXXXIX si deduce, che data una tangente qualunque x si trova la tangente di un arco qualunque multiplo nx con elevare il binomio x+1 alla potenza n, e con formare una frazione quale abbia per numeratore il secondo, quarto, sesto per termine; alternando i segni; e per denominatore; alternando parimenti i segni il primo, terzo, quinto per termine. Questo metodo veduto ancora particolare da Gio: Bernoulli, in parago

# Eccellenza

[...]tro metodo, quale si trova esposto nel Tomo: I: di queste opere [...]: CXXVIII. Con questo metodo date diverse tangenti $a, b, c,$ ecc. [...] diversi archi $u, x, y,$ si trova la tangente dell'arco $u+x+y$ [...] formerà una serie, nella quale la unità sia in primo luogo, in secondo luogo le semplici tangenti, in terzo luogo [...] i rettangoli possibili delle stesse tangenti combinate, [in] quarto luogo tutti i cubi possibili dalle tangenti combinate; [in] quinto luogo ecc. Così nel caso delle tangenti $a, b, c,$ sarà [la] serie la qui esposta. Se da questa serie si compon=ga una frazione il di cui numeratore sia il secondo termine meno il quarto più il sesto ecc., ed il denominatore il primo termine meno il secondo più il quinto ecc. la tangente del arco $u+x+y$ sarà espressa dalla frazione $\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1$ | $+a$ | $+ab$ | $+abc$ |
| | $+b$ | $+ac$ | |
| | $+c$ | $+bc$ | |

[...] ogni ragione. Gio: Bernoulli chiama il primo metodo [spe]ciale [e] caso particolare di questo secondo, quale geometrica=mente dimostra. Di fatti se si cerchi la tangente [d'un] arco triplo di un altro, la di cui tangente sia [a, al]lora le tangenti $a, b, c$ si mutano in $a, a, a$; e la [fr]azione $\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$ si muta in $\frac{3a-a^3}{1-3a^2}$; con for=[mu]la che esige il primo metodo. Però dalla formola es=[p]ressiva dell'arco $u$ si prova questo metodo più generale [...], il che non ha fatto Gio: Bernoulli. Io per meglio [...] provar la di sopra esposta formola, mi servirò dell'al=[tr]o [...] arco $= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{-\sqrt{-1}+z}{1-z\sqrt{-1}}$. Siano adunque li archi $a, b, c$ le tan=genti de quali siano $z, y, x$: si cerchi la tangente dell'arco $a+b+c$ la tangente del quale sia $r$; ed avremo

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(l\,\frac{-\sqrt{-1}+z}{1-z\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+x}{1-x\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+y}{1-y\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\,\frac{-\sqrt{-1}+r}{1-r\sqrt{-1}};$$

onde sarà

$$l\,\frac{-\sqrt{-1}+z}{1-z\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+x}{1-x\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+y}{1-y\sqrt{-1}} = l\,\frac{-\sqrt{-1}+r}{1-r\sqrt{-1}}.$$

Essendo il prodotto [...] numero nella formola della quale ci serviamo $-\sqrt{-1}$ sarà

$$l\,\frac{-\sqrt{-1}+z}{1-z\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+x}{1-x\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+y}{1-y\sqrt{-1}} = l\,\frac{-1-z\sqrt{-1}-x\sqrt{-1}+xz}{-\sqrt{-1}-z-x+xz\sqrt{-1}} + l\,\frac{-\sqrt{-1}+y}{1-y\sqrt{-1}} =$$

$$l\,\frac{\sqrt{-1}-z-x-xz\sqrt{-1}-y-zy\sqrt{-1}-xy\sqrt{-1}+xzy}{1+z\sqrt{-1}+x\sqrt{-1}+xz+y\sqrt{-1}+yz+yx-xzy\sqrt{-1}} = l\,\frac{-\sqrt{-1}+r}{1-r\sqrt{-1}}.$$

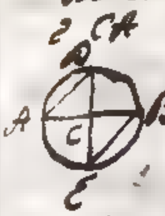
Togliendo dunque i Logaritmi, e moltiplicando in croce si avrà

$$[\ldots]-z-x-xz\sqrt{-1}-y-zy\sqrt{-1}-xy\sqrt{-1}+xzy+r+rz\sqrt{-1}+rx\sqrt{-1}-xzr+ry\sqrt{-1}$$
$$[\ldots]yr-xyr-xzyr\sqrt{-1} = \sqrt{-1}+z+x-xz\sqrt{-1}+y-zy\sqrt{-1}-xy\sqrt{-1}-xzy-r$$
$$[\ldots]\sqrt{-1}+rx\sqrt{-1}+xrz+ry\sqrt{-1}+ryz+yrx-xryz\sqrt{-1}:$$

quindi rimane= sarà $-z-y-x+xzy+r-xzr-zry-xyr = z+y+x-xzy-r+xzr+zry+$

306

xyr: onde $ax - axzr + axzy - axyz = az + az + ay - axzy$; e fi-
nalmente $r = \frac{z+y+x-xzy}{1-xz-zy-xy}$: il che confrontato con la fo[rmola]
di sopra $\frac{a+b+c-abc}{1-ab-ac-bc}$. Da queste formole espressi[ve]
dell'arco u non solo si deduce la maniera per determin[are]
la tangente di un arco eguale alla somma di altr[i]
molti, le tangenti de' quali date sono; ma in oltr[e]
dati li archi a, b, c, d, e le tangenti; con un al[tro]
consimile, si puole determinare la tangente di un[o]
qualunque $a+b-c-d$, $a-b-c-d$, $a+b+c-d$ &c. Q[uesto]
metodo Gio: Bernoulli nel citato numero (XXVII n[on]
l'ha dimostrato, che per induzione; con l'ajuto però
citate formole si puole con esattezza dimostrar[e]
solo le quattro esposte formole mettono a prova ci[ò]
cono al vero; ma in oltre, se nella riduzione dell[']
circolare ad un Logaritmo immaginario, in luogo di prin[cipio]
per sottangente della Logaritmica l'unità, come fann[o]
mente lui fa, si prende $\sqrt{-1}$, o vero $-\sqrt{-1}$ si avrann[o]
tre formole, quali tutte egualmente ci condurr[anno]
stessa soluzione.

Se un fatto ab sia eguale ad altro fatto cd essendo $ab = cd$
$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$: onde dall'eguaglianza delle frazioni $\frac{a}{c}$, $\frac{d}{b}$ si
communemente, che se un fatto eguaglia altro fatto sieno
reciprocamente proporzionali. Dopo ciò io li osservo i sent[imen]-
ti di Leibnitz, quali si trovano nella lettera nos scritta a Ber[noulli]
e da me citata nella mia ultima. = Quomodo ponendo +1 u[t]
-1 ut est -1 ad +1, cum prior ratio sit majoris ad minu[s]
terior minoris ad majus. Etsi ergo verum sit esse equales
duas fractiones $\frac{+1}{-1}$, $\frac{-1}{+1}$, non tamen fractiones idem quantum
dicere licet ut per illas indicantur. Dall'essere nel circolo ch[e]
DC : CA = EC : CB non viene la proporzione $1:-1 = -1:1$; mentre rispetto
e CA sono negative CE, e CB. Di fatti come è possibile,
DC divisa per CA eguagli $1:-1 = -1$; quando CA
è in direzione contraria a CB. Dall'esseri

que DC : CA = EC : CB si potrà dedurre $1:1 = -1:-1$,
ma non già $1:-1 = -1:1$

Nel futuro ordinario risponderò alla sua in data 13: 9bre
tanto dunque in attenzione de' suoi favori, e comm[andi]
con ogni dovuto rispetto mi dico.

Di V. S. Ill.ma — Roma 14: 9bre 1774

Umil.mo ed Obblig.mo Ser[vitore]
Giuseppe Calandrelli

Eccellenza

La lettera di V.E. diretta al Sig.r Sciarini
fu da me subito spedita in Ispagna pel
solito canale del Ministro. Sulla speranza
di potere servire V.E. delle esercitazioni Geometriche
del Cavallieri ho di giorno in giorno differito
a scriverle e di replicare l'incommodo.
Mi resta tale desiderio, mentre fin'adesso
non ho potuto ritrovarle, avendone portato
via l'abb. Canonici le esequite ultime
Copie, quando fu ultimamente a Bologna.

non mi inganno, la vera teorica della Musica,
che io interamente deduco dalla semplicità delle
proporzioni fra le durate delle vibrazioni sonore.
Mi lusingo, che questa Opera abbia da trovar esito,
venendomi continuamente ricercata, quando si
stampa, ed io certamente non mancherò di
procurarla.

306 340

Spero che V. E. mi perdoni la mancanza, o per dir meglio la troppa lunga dilazione nel rispondere a V. E., in cui riconosco sempre il mio Cariss.mo Maestro Co. Vincenzo, ed a cui professarò sempre ogni mia più profonda ed ossequiosa servitù nel mentre che divotamente le bacio la mano.

Bologna 1 Xbre 1778

Di V. E.

Umil.mo Divot.mo ed Obbl.mo Serv.e
Gio. Ant.o Vedevilla

... quel ... = ... per ...
E ... ma non già ... = ...

Nel futuro ordinario risponderò alla sua in data 13: 9bre. Resto dunque in attenzione de' suoi favori, e comandi con ogni dovuto rispetto mi dico.

di V. S. Ill.ma · Roma 14: 9bre 1778

Umil.mo ed Obblig.mo Serv.e
Giuseppe Calandrelli

non mi inganno, la vera teorica della Musica,
che io interamente deduco dalla semplicità delle
proporzioni tra le durate delle vibrazioni sonore.
Mi lusingo, che questa Opera abbia da trovar esito,
venendomi continuamente ricercato, quando si
stampa, ed io certamente non mancherò di
procurarne.

306

A Sua Eccellenza
il Sig.r P.ne Sidrono Siccati
Venezia
Treviso

... que ... [illegible]
È ma non già ...
Nel futuro ordinario risponderò alla sua in data 13: 9bre. P...
tanto dunque in attenzione de' suoi favori, e command...
con ogni dovuto rispetto mi dico.
a V. S. Ill.ma Roma 14: 9bre 1778

Umilmo ed Obligmo Serv...
Giuseppe Calandrelli

Ill.mo Sig.re Sig.re Prone Col.mo 343

...ello promesso con rispondere alla sua dottissima in data 13 8bre. Nella
...penultima ho addotte delle ragioni per mezzo le quali facevo vedere che
...espressione $\frac{1}{0}$ non poteva corrispondere idea alcuna distinta di quantità.
...tali ragioni aggiungo ora delle altre, quali a mio credere dimostrano non
...esser la tangente del quadrante espressa per $\frac{1}{0}$. Data la tangente $x$ dell'
...$u$ si trova $u = (x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \&c$: ... Dunque l'arco $u$ si faccia
...90°; ed $x = \frac{1}{0}$, sarà $u = \frac{1}{0} - \frac{1}{3 \cdot 0} + \frac{1}{5 \cdot 0} - \frac{1}{7 \cdot 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$. Di più
... il quadrante diviso in parti

Sig. Giacomo Sig.re e Prone Rimo 341

Castelfranco 2. xbre 1776.

...ringrazio dell'ordine dato al Libraio di spedire le Instituzioni Analitiche a Padova al Sig. Giuseppe Comirato. Ho presentemente mi trovo in Castelfranco, di dove fra pochi giorni mi porterò a Treviso, dove ritroverò le dette Instituzioni. Ritorno alla mi preserva a chiedere per conto ... in Venezia le 2 ss. Bolognesi, significandomi a quanto ...
...precisamente agguagliano.

Sperava, che il Sig. Remondini intraprendesse la stampa del mio Trattato di Contrappunto; ma egli non vuol fare la spesa dei caratteri musici, massimamente che non ha intenzione di imprimer Opere di tale natura. Se esso Trattato non si pubblica, mentre ancora Iddio Signore mi conserva in vita, io ben vedo che la mia fatica di molti, e molti anni sono inutilmente gettate. Cotesto Sig. Petronio della Volpe stampa tutte le Opere del P. M. Martini, e quindi confido, che col valido di Lei mezzo assumer possa l'edizione della mia Opera in due Tomi in quarto contenente, se pur non mi inganno, la vera teorica della Musica che io interamente deduco dalla semplicità delle proporzioni tra la durata delle vibrazioni sonore. Mi lusingo, che quest'Opera abbia da trovar esito, venendomi continuamente ricercato, quando si stampa, ed io certamente non mancherò di

procurarne:

306

362

procurarne la vendita di molte copie. Mi raccomando adunque alla sua cordiale assistenza, mediante la quale sono pieno di fiducia di ottenere l'intento.
Il Sig.r Ab. Pisi nel suo Elogio del Cavalieri poteva risparmiare le invettive contro dei Gesuiti, la quali certamente dagli uomini onesti non possono essere approvate.
Ella disponga di me come di cosa sua, e come conoscente quale ho l'onore di sottoscrivermi

Di Lei Sig.r Giacomo Riverito

V. U. Sig.r Giacomo Mariscotti
Bersalli. Bologna

Div.mo Obbl.mo Ser.v V.ro
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron. Col.mo

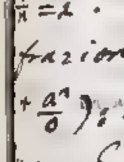
...lle promesso con rispondere alla sua dottissima in data 13 9bre. Nella
...penultima ho addotte delle ragioni per mezzo le quali faccio vedere, che
...espressione $\frac{1}{0}$ non puole corrispondere idea alcuna distinta di quantità.
...quelle ragioni aggiungo ora delle altre, quali a mio credere dimostrano non
...essere la tangente del quadrante espressa per $\frac{1}{0}$. Data la tangente $x$ dell'
...arco $u$ si trova $u = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \&c$: se dunque l'arco $u$ si faccia
...90°, ed $x = \frac{1}{0}$, sarà $u = \frac{1}{0} - \frac{1}{3 \cdot 0} + \frac{1}{5 \cdot 0} - \frac{1}{7 \cdot 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$. Di più, ... il quadrante diviso in parti ...

Nel [illegible]

an [illegible]

...nelle promesse con rispondere alla sua dottissima in data 13 9bre. Nella penultima ho addotte delle ragioni per mezzo le quali faccio vedere, che l'espressione $\frac{1}{0}$ non puole corrispondere idea alcuna distinta di quantità. A queste ragioni aggiungo ora delle altre, quali a mio credere dimostrano non potersi la tangente del quadrante esprimere per $\frac{1}{0}$. Data la tangente $x$ dell'arco $u$ si trova $u = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \&c$: se adunque l'arco $u$ si faccia 90°, ed $x = \frac{1}{0}$; sarà $u = \frac{1}{0} - \frac{1}{3 \cdot 0} + \frac{1}{5 \cdot 0} - \frac{1}{7 \cdot 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} + \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = 0$. Di più, sia la tangente del quadrante $\frac{1}{0}$. Si consideri il quadrante diviso in parti... ed infinitamente piccole: saranno questi archetti, eguali alle proprie tangenti. Si dica il quadrante $p$, l'infinito sia $n$ sarà $\frac{p}{n}$ uno delli archetti infiniti, ed insieme tangente dello stesso archetto. Per mezzo del... indicato nella mia ultima, data la tangente $\frac{p}{n}$ dell'archetto $\frac{p}{n}$, si trova la tangente del quadrante, multiplo all'infinito di $\frac{p}{n}$, con elevare il binomio... alla potenza infinita $n$; e con formare la frazione pur anche... indicata; quale compita l'operazione sarà $\frac{p - \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{120}p^5 - \&c}{1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{24}p^4 - \&c}$. A mio credere... sembra impossibile, che l'esposta frazione, ed $\frac{1}{0}$, siano eguali; mentre queste due frazioni non hanno numeratori, e denominatori eguali; né pure il numeratore $p - \frac{1}{6}p^3 + \frac{1}{120}p^5 - \&c$ multiplicato per il denominatore zero, può formare un prodotto eguale ad $1 \times (1 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{24}p^4 - \&c)$. ...esposta frazione, è quella, della quale si serve Gio. Bernoulli nel ...ro CXXVII delle sue opere per determinare una tangente qualunque ...to l'arco $p$. Ma lasciando tali ragioni: si prenda pure la formola $u = \frac{\sqrt{-1}}{n} l \frac{-az - a^2\sqrt{-1}}{z - a\sqrt{-1}}$. Si faccia $z = \frac{a}{n}$: si troverà sempre $u = \frac{\sqrt{-1}}{n} l \frac{...-a^2\sqrt{-1}}{...-a\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{n} l \frac{-\frac{a^2}{n} - \frac{na^2\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n} - \frac{na\sqrt{-1}}{n}}$. Questa formola, purché $n$ non sia ...risoluto, sarà sempre eguale a $\frac{\sqrt{-1}}{n} l - a \cdot \frac{1 + n\sqrt{-1}}{1 - n\sqrt{-1}}$; che se poi ...a zero, sarà impossibile secondo i suoi medesimi principii, che $\frac{-\frac{na^2\sqrt{-1}}{n}}{\frac{na\sqrt{-1}}{n}}$ sia eguale a $-1$. La frazione $\frac{-\frac{a^2}{n} - a^2\sqrt{-1}}{\frac{a}{n} - a\sqrt{-1}}$ si riduce sem... ed altra eguale $\frac{\frac{a^2}{n} - \frac{na^2\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n} - \frac{na\sqrt{-1}}{n}}$; mentre fatta la riduzione delli inte... $a\sqrt{-1}$ ad una frazione del detto denominatore $n$: purché $n$ abbia ...il valore sarà sempre $\frac{na^2\sqrt{-1}}{n} = a^2\sqrt{-1}$, $\frac{na\sqrt{-1}}{n} = a\sqrt{-1}$. Che se poi $n = 0$ allora nella frazione $\frac{-\frac{a^2}{n} - \frac{na^2\sqrt{-1}}{n}}{\frac{a}{n} - \frac{na\sqrt{-1}}{n}}$; o i termini $-\frac{na^2\sqrt{-1}}{n}$, ...$\sqrt{-1}$ rimangono del valore $-a^2\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$: ed allora la frazione ...puole mai eguagliare $-1$; essendo per questo necessario, che i termini $\frac{na^2\sqrt{-1}}{n}$, $-\frac{na\sqrt{-1}}{n}$ svaniscano, e si riducano a zero: overo i termini ...$\sqrt{-1}$, $-\frac{na\sqrt{-1}}{n}$ sono zero; ed allora sarà falso, il fatto $n = 0$; ...$\frac{n}{n} = 1$. Ma svaniscano pure i termini $-\frac{na^2\sqrt{-1}}{n}$, $-\frac{na\sqrt{-1}}{n}$, e si riduca la frazione a $\frac{-\frac{a^2}{n}}{\frac{a}{n}}$: sarà in questo caso $\frac{-\frac{a^2}{n}}{\frac{a}{n}} = -\frac{a^2}{0} : \frac{a}{1 \cdot 1} = (+\frac{a^2}{0}) : a = \frac{0}{a} = 0$

...luogo geometrico delle ascisse $n$, e semiordinate $\frac{n}{n}$ è retto una linea

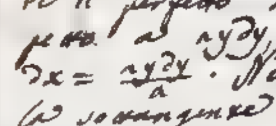


BD parallela all'asse EC, la di cui semiordinata costante, non si puole esprimere per $\frac{n}{n}$; se già non si sia determinato ...$\frac{cn}{n} = 0$. ...

...ne dalle cose premesse una formola $(1+0)^{...} - 1 = 0$, ... si trovi... ...tiva ora esposta, e sempre si troverà $0 = \pm \frac{c\Delta l}{n} \cdot \sqrt{-1}$: quale equazione non

esser questa semiordinata l'unità. In questa linea il principio delle ascisse è del tutto arbitrario; se adunque in A si stabilisca il principio, nella distanza AC la semiordinata, quale si suppone l'unità, si potrà esprimere ancora per $\frac{AC}{AC}$. Nel punto A la semiordinata è l'unità, quale nego, che si possa esprimere per $\frac{0}{0}$: mentre come essere $\frac{n}{n}=1$ allorchè n rappresenta una data qualunque quantità, ma è in questione essere $\frac{n}{n}=1$ fatta $n=0$.

Quando chiamo una quantità infinitamente piccola, con ciò non intendo, che questa quantità sia costante, e non possa ammettere un continuo decremento. Sia minima quanto uno vuole una quantità immediatamente al zero non può passare, se non per salto; ma essendo vera quantità si dee dare la metà, la quarta parte ecc. per fino all'infinito. Da questo viene, che io non intendo una quantità possa essere <u>nell'atto di annullarsi</u>. Questa espressione sembra, che supponga una quantità tanto minima, così che decremento ricever non possa: ma questo ripugna alla natura di quantità, quale necessariamente deve ammettere delle parti. Quando adunque si dice $\frac{x}{y}$ <u>nell'atto d'annullarsi</u> non si puole intendere $\frac{x}{y}=\frac{0}{0}$; ma si dovrà intendere $\frac{dx}{dy}$, $\frac{ddx}{ddy}$, $\frac{dddx}{dddy}$ ecc. delle quali ragioni si verifica l'eguaglianza con $\infty$, con a, con $\frac{1}{\infty}$; secondo che $x:y$ è maggiore di qualunque data, o data, o minore di qualunque data; e purchè con la stessa legge con la quale cresca o decresca x, cresca o decresca y. Questa eccezione è necessaria, così nella parabola allorchè la semiordinata y diviene eguale all'ascissa x, pure dy non è eguale a dx; perchè nella parabola le ascisse non crescono, o decrescono con la stessa legge delle semiordinate. Il metodo delle flussioni o degli infinitamente piccoli, è un metodo dell'approssimazione: ma siccome l'approssimazione è tale, che l'errore è minore di qualunque assegnabile; quindi questi di sono i metodi dell'esattezza. Nel determinare la sottangente in una curva qualunque o per il metodo delle flussioni, o per il metodo degli infinitamente piccoli si considera una semiordinata CF infinitamente vicina alla DB; così che DE sia elemento dell'ascissa AB = x, ed EF elemento della semiordinata BD = y. Questi elementi, quali al certo zeri assoluti non sono, formano il triangolo rettilineo DEF, quale da' moderni triangolo caratteristico della curva si nomina. Essendo




poi questo triangolo DEF simile al triangolo HBD; se AB si dica x, BD, y; viene $EF = dy : DE = dx = y : BH$: onde generalmente parlando la tangente $BH = \frac{ydx}{dy}$. Se dall'equazione alla curva si determinino dx, dy, ne verrà la sottangente della data curva in termini finiti. Così nella parabola $ax = y^2$ sarà $adx = 2ydy + dy^2$. Con $2ydy + dy^2$ intendo essere il perfetto differenziale di $y^2$. Ma siccome $dy^2$ è infinitamente piccolo rispetto a $2ydy$, quindi con tutto il rigore geometrico sarà $adx = 2ydy$; onde $dx = \frac{2ydy}{a}$. Nella formola generale $\frac{ydx}{dy}$ sostituendo il valore di dx la sottangente nella parabola $\frac{2y^2}{a} = 2x$. Calcolando in questo modo il caso particolare, quale mi propone nella sua stimatissima, la sottangente con ogni esattezza si determina. L'analogia $FE : ED = DB : BH$ non ha se DE, EF non siano infinitamente piccole, onde secondo la sua posizione, sarà $a^2 + ax = a^2 + 2ay + y^2$; ma siccome y rappresenta l'incremento, quale è ricevo la semiordinata AB; sarà $y^2$ infinitamente piccolo rispetto a 2ay; onde con tutto il rigore geometrico come di sopra si è fatto sarà $ax = 2ay$; onde $x = 2y$ e però $y : 2y = a : BH = 2a$. Se si dica essere $FE : ED =$

w -

svanendo la y; che è lo stesso, riducendosi al zero assoluto la FE,
sarà allora FE : DE = 1 : 2; mentre in primo luogo la vera ragione
FE : DE è $y : 2y + \frac{y^2}{a}$ quale ragione si converte sempre nella ragione $1 : 2 + \frac{y}{a}$
y rappresenti una quantità qualunque. Che se poi y sia zero la ragione
si convertirà in $0 : 2\cdot 0 + \frac{0\cdot 0}{a}$ quale non si potrà mai convertire
se già non vogliamo supporre che $\frac{0}{0}$ eguagli l'unità: il che
in questione. In secondo luogo ridotta la FE, e DE al zero assoluto:
e di DE altro non concepisco, che il punto D; onde dovrà essere
Dal punto D come 1 : 2. Secondo il metodo delle flussioni, e
infinitamente piccoli una quantità qualunque y+dy senza alterare
geometrico si pone eguale ad y. Non si è mai creduto, che espri-
l'integrale di $2ydy + dy^2$ si ottenesse l'adequazione di questo in-
ma sempre si è creduto che $y^2$ esprimesse senza alterare il rigore
l'integrale di 2ydy: e pure il perfetto differenziale di $y^2$ è 2ydy
Niuna meraviglia adunque che ancorchè si esprima la sottangente per 2a
2a + y si intenda anche espressa con ogni esattezza ancora per 2a
y sia infinitamente piccolo rispetto ad a, come lo deve essere
nostro caso. Il modo poi con il quale il metodo delle flussioni ci conduce
ultima esattezza mi persuado debba essere il seguente. Essendo nella
Parabola $adx = 2ydy + dy^2$; nella formola generale della sottangente $\frac{ydx}{dy}$ sosti-
tuito il valore di dx, sarà la sottangente nella Parabola espressa per
$2a + \frac{ydy}{a}$. Questa sottangente sarà certamente maggiore di quello, che l'ultimo
esigga, essendosi per l'analogia FE : ED = DD : DH; supposto, che DD per-
della tangente, coincide con l'architetto DH. E' chiaro però, che questo eccesso,
sempre decresce, decrescendo EF, così che svanisce l'eccesso, e svanendo
EF; o riducendosi dy a zero: ma ridotto dy a zero, è la sottangente accurata $= \frac{2y^2}{a} + \frac{y\cdot 0}{a} = \frac{2y^2}{a} = 2x$. Lo
stesso si ha da sottangente nel caso particolare di DH = 2a+y. In questo caso 2a+y non
si dica nel caso particolare la sottangente accurata, ma sempre più si accosta all'accurata = 2x:
svanendosi y; onde ridotto y a zero si ha la sottangente accurata; onde svanendo i lati omologi
y a zero il triangolo DEF svanisce, svanirà l'analogia tra lati DD, DH,
triangolo DEF; dirò per anche triangolo zero; onde essendo FE : DE = 0 : 0 non sarà, che
lati omologi del triangolo zero; che DD : DH, nel caso particolare, sia
FE : DE = 1 : 2; ma bensì sarà
esattamente come 1 : 2

quale proprietà per ridurre $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u = \sqrt{-1}\,l\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ è singolare e de-
del suo sublime intendimento. Ciò non ostante dal modo di calcolare nell'
altra formola, deducendosi; supposto u di 90°; $\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} = -2$; se fuori
dubbio non si dimostri la possibilità di questa equazione, rimarrà
luogo a dubitare del modo di calcolare; non potendosi dal vero dedurre
un assurdo. A tutto ciò aggiungo un piccolo calcolo, quale credo decisivo
la nostra questione. Sia adunque $u = \sqrt{-1}\,l\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ sarà $2u = 2\sqrt{-1}\cdot l$
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,l\frac{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}{-1} = \sqrt{-1}\,l\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{-1}}$: supposta z seno di 2u. Togliendo
i Logaritmi, e multiplicando in croce, sarà $2x^2\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+2x\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} =$
$\sqrt{z^2-1}$; onde facendo $b = 2x^2\sqrt{-1}-\sqrt{-1}+2x\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1}$ sarà $b = -z-\sqrt{z^2-1}$; $b+z = -\sqrt{z^2-1}$;
$b^2+2bz+z^2 = z^2-1$; $\frac{b^2-1}{-2b} = z$. Essendo adunque $z = \frac{1}{2b}-\frac{b}{2}$; sostituendo il valore
e riducendo sarà $z = \frac{-2}{(4x^2-2)\cdot\sqrt{-1}+4x\sqrt{1-x^2}} + (1-2x^2)\cdot\frac{\sqrt{-1}}{2} + x\cdot\sqrt{1-x^2}$. Da ques-
ta equazione chiaramente si deduce l'assurdo; mentre z sarà sempre im-
maginaria, se non nel caso di $4x^2=2$; il che corrisponde ad $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ = sen: 45°. In questo
caso adunque sarà $z = \frac{-2}{(2-2)\sqrt{-1} - \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}} + (1-1)\cdot\sqrt{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{4}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$
realmente deve essere il seno di 2u: supposto u = 45°. Con lo stesso metodo

$\frac{-2x}{2} = 0$; ... una formola $(1+0)^2 - 1 = 0$, ...
dalle cose premesse una formola
ora esposta, e sempre si troverà $0 = \pm\frac{2Al}{2}\cdot\sqrt{-1}$: quale equazione non

...do $u = \sqrt{-1}\, l\, \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}$ sarà $3u = 3\sqrt{-1}\, l\, \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{-1}}$. Chiamando adunque $z$ il seno ... e togliendo i logaritmi sarà $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{z+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{-1}}$; e operando attualmente ... $4x^3\sqrt{-1} - 3x\sqrt{-1} + 4x^2\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{-1}\cdot z - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{z^2-1}$; onde $4x^3 - 3x + 4x^2\sqrt{x^2-1}$ ... $= -z - \sqrt{z^2-1}$. Si dica il primo termine di questa equazione $b$ e avremo $b = -z - \sqrt{z^2-1}$; $b + z = -\sqrt{z^2-1}$; $b^2 + 2bz + z^2 = z^2 - 1$; $b^2 + 1 = -2bz$; $z = \frac{b^2+1}{-2b}$; $z = \frac{-b}{2} - \frac{1}{2b}$. Sostituendo il valore di $-b$ sarà $z = \frac{-4x^3+3x-4x^2\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-1}}{2} + \frac{2}{-8x^3+6x-8x^2\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{x^2-1}}$. Da questa equazione similmente si vuole dedurre le impossibile ... immaginario, fuori che nel caso di $4x^2 = 2$; il che equivale ad $x = \frac{1}{2} =$ seno ... In questo caso le equazione si muta in $z = \frac{-4}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3-1} = 1$, come deve ... il seno di $3u$ fatto $u = 30°$. Si prenda ora le equazione di sopra esposta, ... $z$ è seno di $2u$, e avremo $2x^2\sqrt{-1} - \sqrt{-1} + 2x\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} = -z - \sqrt{z^2-1}$; ma $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1}$ ... $\sqrt{x^2-1}$; dunque $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{1-x^2}$; $-\sqrt{z^2-1} = -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-z^2}$. Facendo queste sostituzioni si avrà $2x^2\sqrt{-1} - \sqrt{-1} - 2x\sqrt{1-x^2} = -z - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-z^2}$, $2x^2\sqrt{-1} - \sqrt{-1} + \sqrt{-1}\cdot\sqrt{1-z^2} = 2x\sqrt{1-x^2} - z$; e quadrando $-4x^4 + 4x^2 - 4x^2\sqrt{1-z^2} - 1 + 2\sqrt{1-z^2} + z^2 = 4x^2 - 4x^4 - 4xz\sqrt{1-x^2} + z^2$; $-4x^2\sqrt{1-z^2} - 1 + 2\sqrt{1-z^2} =$ ... $-4x^2\sqrt{1-z^2} + 2\sqrt{1-z^2} = -4xz\sqrt{1-x^2} + 1$; e quadrando di nuovo $16x^4 - 16x^4z^2 - 16x^2 + 16x^2z^2 + 4$ ... $= 16x^2z^2 - 16x^4z^2 - 16xz\sqrt{1-x^2} + 4$; $4z^2 = 16xz\sqrt{1-x^2} - 16x^2 + 16x^4$; $z^2 = 4xz\sqrt{1-x^2} - 4x^2 + 4x^4$ ... Si dica $4x\sqrt{1-x^2} = p$ e avremo $z^2 - pz = -4x^2 + 4x^4$; $z^2 - pz + \frac{p^2}{4} = -4x^2 + 4x^4 + \frac{p^2}{4}$; ... $\pm\sqrt{-4x^2+4x^4+\frac{p^2}{4}} + \frac{p}{2}$; $z = \pm\sqrt{-4x^2+4x^4+4x^2-4x^4} + \frac{p}{2}$; $z = 2x\sqrt{1-x^2}$; come realmente deve essere il seno di un arco doppio. Similmente nell'equazione $4x^3\sqrt{-1}$ ... $+ 4x^2\sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{x^2-1} = -\sqrt{-1}\cdot z - \sqrt{-1}\cdot\sqrt{z^2-1}$; nella quale $z$ è seno di $3u$: facendo le accennate sostituzioni, si avrà $4x^3\sqrt{-1} - 3x\sqrt{-1} + z\sqrt{-1} = 4x^2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-z^2}$. E quadrando, e riducendo $6xz - 8x^3z = 2 + 8x^2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-z^2} - 2\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-z^2}$. $3xz - 4x^3z - 1 = 4$ ... $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-z^2} - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-z^2}$; e di nuovo quadrando, e riducendo $-6xz + 8x^3z = 24$ ... $16x^6 - 9x^2 - z^2$; $z^2 + 8x^3z - 6xz = 24x^4 - 16x^6 - 9x^2$. Si faccia $8x^3 - 6x = p$ ... avremo $z^2 + pz = 24x^4 - 16x^6 - 9x^2$; $z^2 + pz + \frac{p^2}{4} = 24x^4 - 16x^6 - 9x^2 + \frac{p^2}{4}$; $z = \pm$ $\sqrt{24x^4 - 16x^6 - 9x^2 + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}$; $z = \pm\sqrt{24x^4 - 16x^6 - 9x^2 + 16x^6 - 24x^4 + 9x^2} + 3x - 4x^3$; $z =$ $3x - 4x^3$ come in realtà deve essere il seno di $3u$. I metodi qui adoperati sono fondati su le più semplici leggi dell'Analisi, e pure il primo metodo ci dimostra le impossibile, ed il secondo ci conduce al vero. Non potendosi adunque dal vero dedurre il falso; ma bensì potendosi dal falso dedurre il vero bisognerà dire, che il metodo di calcolare quale si tiene nella ... de degli archi ridotti a logaritmi immaginarii non sia conforme alla verità; onde per conseguenza nè pur conforme al vero sarà qualunque ragione tra la periferia, e il diametro, dedotta da questo modo di calcolare ... Sarò sommamente tenuto alla gentilezza del Chiarissimo Sig.r Conte, se vorrà ... dinare queste mie ragioni, nè mancherà il suo sentimento, che apprezzo al sommo. In attenzione adunque mi protesto tale, quale dev... essere.

Di V. S. Ill.ma Roma: 5 Decembre 1778

Umiliss.o ed Obblig.mo Serv.re
Giuseppe Calandrelli

...sa sotto gli occhi la formola $u = \sqrt{-1}\cdot l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{n}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$ esprimente l'arco circolare $u$ descritto col raggio $= 1$ col mezzo o del seno, o della tangente $z$, i quali seno e tangente stanno fra loro come $\sqrt{1-x^2} : 1$; egli è infallibile, che asse=gnato ad $u$ un dato valore, essere dee $\sqrt{-1}\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = \frac{\sqrt{-1}}{n}\, l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$, e per conseguenza $n\, l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{-1}}\right) = l\left(\frac{-z-\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$. Suppongasi $u = \frac{1}{n}p$ quarta parte della circonferenza, a cui si riferisca $x = 1$, $z = \infty$, e si scoprirà $n\, l\frac{1}{\sqrt{-1}} = l\left(\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}\right)$: ma $n\, l\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right) = l{-1}$; dunque $l{-1} = l\left(\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}\right)$, che è ciò, che da Lei, e dal Co. Vincenzo mio fratello si nega. Che sia $n\, l\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right) = l{-1}$, si prova evidentemente colla nota proprietà della logaritmica, che ad una serie aritmetica di logaritmi o, $l\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)$, $2\, l\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)$ ci dee corrispondere una serie geometrica di numeri $1$, $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, $-1$, in cui il prodotto dei due estremi si agguaglia al quadrato del medio. Ella sostiene non potersi nella quantità $\frac{-\infty-\sqrt{-1}}{\infty-\sqrt{-1}}$ trascurare $\sqrt{-1}$ benchè

... $z = 1+\partial n$, Cos: $\frac{n\Delta p}{n} = 1$, Sin: $\frac{n\Delta p}{n} = \frac{n\Delta p}{n}$; dunque ... $\pm\frac{n\Delta p}{n}\cdot\sqrt{-1}$: ma di sopra è stato stabilito $\frac{x}{n} = 0$; dunque $o = \pm\frac{n\Delta p}{n}\cdot\sqrt{-1}$, il che ... se per ... non si stabilisce $\frac{n\Delta p}{n} = 0$, come realmente si do= ... stabilire, essendosi fatto Cos: $\frac{n\Delta p}{n} = 1$, qual cosa necessariamente esige ... $\frac{n\Delta p}{n} = 0$. Per dimostrare l'assurdità del metodo di Eulero si prenda indipenden= ... dalle cose premesse una formola $(1+0)^n - 1^n = 0$, e si vada calcolando nella maniera ora esposta, e sempre si troverà $o = \pm\frac{n\Delta p}{n}\cdot\sqrt{-1}$: quale equazione non

benchè minima rispettivamente a ciò, e la sua proposizione sarebbe vera, se fosse $z$ uguale all'unità divisa per una grandezza infinitesima. Ma quando $u = \frac{1}{2}p$, la proporzione fra la tangente, ed il seno $z : x :: 1 : \sqrt{1-x^2}$ prende il seguente aspetto $z : 1 :: 1 : 0$, e però $z = \frac{1}{0}$. Avremo pertanto in tal caso $\frac{-z-\sqrt{-1}}{1-z\sqrt{-1}} = \frac{-\frac{1}{0}-\sqrt{-1}}{\frac{1}{0}-\sqrt{-1}} = \frac{-1-0\sqrt{-1}}{1-0\sqrt{-1}}$ ch'è quello stesso valore, che si raccoglie dalla formola esprimente l'arco in col mezzo del seno.
Il calcolo degli immaginarj, e de' loro logaritmi, oppure perchè sommamente difficile, è degno del suo talento. Se ella mi farà il favore di communicarmi la sua Dissertazione, la leggerò con piacere, e le significherò il sincero mio sentimento, essendo persuaso che le sue produzioni incontrino l'approvazione del Pubblico. Ed intanto con pienissima stima e rispetto mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 10. xbre 1774

Ill.mo Sig.r Leopoldo M.a Caldani. Roma.

Divot.mo Obbl.mo Servitore
Giordano Riccati

Umilmo ed Obbligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

il meto=
rivende
primo.
dono po=
è facile
iderebbe
quazione gene=
sarà $dy =$
$(2+i)$. Sic=
isto vice=
imento di
do $i$ in=
$dy$ li in=
enti di Eu=
lunque nu=
l'uno diffe=
questo diffe=
$\frac{1}{1+dy}$ : ma
$= dy$ : tro=
o: dello
ticolare;
idosso giro
$y$, trovare
numero co=
$dy$ se ne
ciò che lo è
la progres=
ndo $dy$
ilmente
sarà la
rà $ndy = y$,
nata $a =$
si prenda
à nella
esattamen=
ione.
ipotesi di
si dica
i nel mio
con la d=
que; esse=
la $(1+\frac{y}{n}) =$
avremo
$z^n - nz$
$\frac{n\lambda p}{n} \cdot \sqrt{-1}$.
ostituzione

$z = 1 + \frac{y}{n}$, $\cos.\frac{n\lambda p}{n} = 1$, $\sin.\frac{n\lambda p}{n} = \frac{n\lambda p}{n}$; dunque . . . . . . .
$\pm\frac{n\lambda p}{n}\cdot\sqrt{-1}$ : ma di sopra è stato stabilito $\frac{y}{n} = 0$; dunque $o = \pm\frac{n\lambda p}{n}\cdot\sqrt{-1}$, il che
. . . : se per costantemente non si stabilisca $\frac{n\lambda p}{n} = 0$, come realmente si do=
vrebbe stabilire, essendosi fatto $\cos.\frac{n\lambda p}{n} = 1$; qual cosa necessariamente esige
$\frac{n\lambda p}{n} = 0$. Per dimostrare l'assurdità del metodo di Eulero si prenda indipenden=
temente dalle cose premesse una formola $(1+0)^n - 1^n = 0$, e si vada calcolando nella
maniera ora esposta, e sempre si troverà $o = \pm\frac{n\lambda p}{n}\cdot\sqrt{-1}$: quale equazione non

Umiliss.^o ed Obblig.^mo Servo
Giuseppe Calandrelli.

Ill.mo Sig.r Sig.r Prone Col.mo 

[illegible] con la presente a rispondere alle dotte sue riflessioni fatte sopra il meto=
do del grande, e sublime Eulero. Posta adunque l'equazione $(1+i)^n = x$; prende
[illegible] che x si possa rappresentare qualunque numero. Ciò posto osservo in primo
[illegible] se $i$ rappresenti l'incremento, quale riceve il protonumero uno; non po=
trà in questo caso x rappresentare qualunque numero: ma bensì, come è facile
[illegible] avversi, e come ho io dimostrato nel mio Saggio (§. 9); $(1+i)^n$ non arriverebbe=
[illegible] agguagliare il numero 3. Da ciò ne viene che esprimendo la sottangente gene=
[illegible] $\frac{xdy}{dx}$ sarà certo nella Logaritmica $\frac{xdy}{dx} = 1$; onde fatta $x=1$ sarà $dy = $
cioè $i$, incremento della semiordinata $x=1$, eguale al Logaritmo di $(1+i)$. Sic=
[illegible] x, secondo Eulero rappresenta qualunque numero: quindi acciò questo si ve=
[illegible] bisogna che $i$ rappresenti non solo l'incremento d'uno: ma l'incremento di
qualunque altro numero y. Benchè dunque si dimostri $i = L(1+i)$; supponendo $i$ in=
[illegible] di uno, con ciò non si dimostra essere $L(1+dy) = dy$: esprimendo $dy$ l'in=
[illegible] di qualunque numero y. Per uniformarmi adunque ai sentimenti di Eu=
[illegible] considero una semiordinata $(1+dy)$, e $dy$ intendo l'incremento di qualunque nu=
[illegible] y. Essendo poi in una Logaritmica una semiordinata qualunque al suo diffe=
[illegible] come l'unità o sottangente al differenziale del Logaritmo: sarà questo diffe=
[illegible] $\frac{ddy}{1+dy}$. Il Logaritmo dunque della quantità $1+dy = \int \frac{ddy}{1+dy} = \int ddy \cdot \frac{1}{1+dy}$: ma
[illegible] $1 - dy + dy^2 - dy^3$ &c. dunque $\int ddy \cdot \frac{1}{1+dy} = \int (ddy - ddy\,dy + ddy\,dy^2 - ddy\,dy^3 + \&c.) = dy$: [illegible]
[illegible] le differenze superiori $- ddy\,dy + ddy\,dy^2 - \&c.$ Questa mia dimostrazione, della
[illegible] la sua, che a me si è degnato communicare, non è, che un caso particolare;
[illegible] mente conduce al ritrovamento delle serie, quali con lungo, e fastidioso giro
[illegible] si trovano, risolvendo il Problema: Dato un Logaritmo y o $-y$, trovare
[illegible] semiordinate corrispondenti. Di fatti se in una distanza dal protonumero co=
[illegible] semiordinate corrispondenti... di queste distanze come $dy$ se ne
[illegible] $dy$, la semiordinata si trova $1+dy$: la distanza sarà y. Ora siccome tutte le
[illegible] infinite, e in questo caso le distanze $dy$, $2dy$, $3dy$, $\infty dy$ &c. sono in una continua progres=
[illegible] ordinate nelle distanze ... all'ultimo nella distanza $\infty dy$
geometrica: sarà il primo termine uno, alla potenza n infinita, alla potenza similmente
[illegible] come $1$ elevato alla potenza $n$ infinito; nella distanza y sarà la
[illegible] di $(1+dy)$: esprimendo dunque $n$ l'infinito.
[illegible] ordinata $1 + ndy + \frac{n \cdot n-1}{2} dy^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{6} dy^3 + \&c.$: ma siccome $n = \infty$ sarà $ndy = y$,
$dy^2 = \frac{n \cdot n}{2} dy^2 = \frac{y^2}{2}$; $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{6} dy^3 = \frac{n \cdot n \cdot n}{6} dy^3 = \frac{y^3}{6}$ &c. La semiordinata a=
[illegible] nella distanza y sarà $1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \&c.$ Con simile calcolo se si prenda
semiordinata minore del protonumero, quella sia $1 - dy$, si troverà nella
[illegible] $-y$ la semiordinata $1 - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} + \&c.$ Le cose fin qui dette esattamen=
[illegible] cordano con le idee del Sig.r Eulero: onde su di ciò niuna questione.
[illegible] essere l'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1 = 0$ assurda supponendo sempre, che nell'ipotesi di
[illegible] $\frac{y}{n}$, ovvero $i$ non debbano essere zero. Che se in questa ipotesi di $x=1$, si dica
[illegible] essere $\frac{y}{n} = 1 = 0$, non dirò già essere assurda l'equazione. Di fatti nel mio
[illegible] (§. 9) dico, che la supposizione di $x=1$ non concorderà mai con la
[illegible] nell'equazione $(1+\frac{y}{n})^n = x$ non si faccia $y=0$. Si convenga dunque; esse=
[illegible] nell'equazione $(1+\frac{y}{n})^n - 1^n = 0$; $\frac{y}{n} = 0$, e in questa stessa ipotesi si dica $(1+\frac{y}{n}) =$
$= z$. Ciò posto si avrà $z^n - 1^n = 0$. Prendendo ora il suo modo di dire avremo
[illegible] $\text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n} + \text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n}^2 = \text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n}^2 - 1^2$: ma $1^2 = \text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n}^2 + \text{Sen:}\frac{n\lambda p}{n}^2$; dunque $z^2 - 2z \cdot$
[illegible] $+ \text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n}^2 = -\text{Sen:}\frac{n\lambda p}{n}^2$ ed estraendo la radice $z - \text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n} = \pm \text{Sen:}\frac{n\lambda p}{n} \cdot \sqrt{-1}$.
[illegible] $z = 1 + \frac{y}{n}$, $\text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n} = 1$, $\text{Sen:}\frac{n\lambda p}{n} = \frac{n\lambda p}{n}$; dunque effettuata la sostituzione
[illegible] $\pm \frac{n\lambda p}{n} \cdot \sqrt{-1}$: ma di sopra è stato stabilito $\frac{y}{n} = 0$; dunque $0 = \pm \frac{n\lambda p}{n} \cdot \sqrt{-1}$, il che
[illegible]: se pur contantemente non si stabilisca $\frac{n\lambda p}{n} = 0$, come realmente si do=
[illegible] stabilire, essendosi fatto $\text{Cos:}\frac{n\lambda p}{n} = 1$; qual cosa necessariamente esige
[illegible] $\frac{n\lambda p}{n} = 0$. Per dimostrare l'assurdità del metodo di Eulero si prenda indipenden=
[illegible] dalle cose premesse una formola $(1+0)^n - 1^n = 0$, e si faccia calcolando nella
[illegible] ora esposta, e sempre si troverà $0 = \pm \frac{n\lambda p}{n} \cdot \sqrt{-1}$: quale equazione non

sussistere, se costantemente non si ponga $\frac{2\lambda p}{n}=0$. Questo assurdo non si ...
benchè si voglia calcolare nella maniera, quale mi propone in seguito della
stimatissima. Supposto che $Cos: \frac{2\lambda p}{n}$ non sia costantemente eguale all'...
mi propone $\frac{x}{n} = Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1 \mp \sqrt{-1}\cdot Sen: \frac{2\lambda p}{n}$; quindi osservando essere $Cos: \frac{2\lambda p}{n}$ ...
quantità infinitamente piccola rispetto a $Sen: \frac{2\lambda p}{n}$. Deduce essere $\frac{x}{n} = \pm$ ...
$Sen: \frac{2\lambda p}{n}$. In primo luogo osservo, che benchè sia $Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1$ eguale al ...
verso negativo di un archetto infinitamente piccolo, e per conseguenza infin...
rispetto a $Sen: \frac{2\lambda p}{n}$; ciò non ostante non si puole negligentare rispetto a ...
$\pm\sqrt{-1}\cdot Sen \frac{2\lambda p}{n}$; mentre essendo $\frac{x}{n} = Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1 \pm \sqrt{-1}\cdot Sen \frac{2\lambda p}{n}$, e non essendo ...
$\frac{2\lambda p}{n} - 1$ eguale a zero assoluto, sarà sempre $(\frac{x}{n})^n$ eguale ad una quantità ...
maginaria, ed al contrario negligentando la quantità $Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1$, e facen...
$\pm\sqrt{-1}\cdot Sen \frac{2\lambda p}{n}$ viene $(\frac{x}{n})^n =$ ad una quantità reale. Su di questo mi persua...
fa convenire, mentre nella sua stimatissima in data 16: Otto: mi concesi ...
che la frazione $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}}$ debba essere immaginaria, benchè z sia inf...
relativa: onde essendo $\frac{z-a\sqrt{-1}}{z+a\sqrt{-1}} = \frac{z\sqrt{-1}+a}{z\sqrt{-1}-a}$: supponendosi z infinita rel...
rispetto ad a sarà a infinitesima rispetto a z. Se adunque il nu...
tore $z\sqrt{-1}+a$; trascurando l'infinitesimo a si potesse fare eguale a ...
e così il denominatore $z\sqrt{-1}-a$; trascurando l'infinitesimo a si potesse ...
eguale a $z\sqrt{-1}$: la frazione $\frac{z\sqrt{-1}+a}{z\sqrt{-1}-a}$ sarebbe eguale a $\frac{z\sqrt{-1}}{z\sqrt{-1}} = 1$: onde ...
immaginaria come si concede. In secondo luogo dico: considerandosi ...
acciò si verifichi $(1+\frac{x}{n})^n - 1^n = 0$, ne dedurrà sempre lo stesso assurdo ...
cioè $0 = \pm\sqrt{-1}\cdot Sen: \frac{2\lambda p}{n}$: anzi per cotesto qualunque risposta prendo di ...
risolvere la formola $(1+0)^n - 1^n = 0$, e supponendo, che costantemente ...
non sia eguale all'unità, troverò, uniformandomi al suo modo di ...
$0 = \pm\sqrt{-1}\cdot Sen: \frac{2\lambda p}{n} + Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1$; e trascurando la quantità $Cos: \frac{2\lambda p}{n} - 1$; ...
$\sqrt{-1}\cdot Sen: \frac{2\lambda p}{n}$. Se mi si domandi ora, quale sia l'origine di questi ...
così io rispondo. I fattori trinomiali della formola $(1+\frac{x}{n})^n - 1^n = 0$ ...
ro contenuti nella formola $(1+\frac{x}{n})^2 - 2\cdot(1+\frac{x}{n})\cdot Cos: \frac{2\lambda p}{n} + 1^2$. Dico però, ...
non costi essere immaginario o il primo, e secondo termine della for...
$(1+\frac{x}{n})^n - 1^n = 0$; niuno de' fattori trinomiali potrà farsi eguale a zero, ...
del fattore quadratico $(1+\frac{x}{n})^2 - 2\cdot(1+\frac{x}{n}) + 1^2$, il quale nasce dal suppor...
0, o vero $Cos: \frac{2\lambda p}{n} = 1$. Non potendo però questo fattore quadratico ...
do i principii di Eulero essere fattore della formola $(1+\frac{x}{n})^n - 1^n = 0$: ma ...
la radice di questo quadrato: quindi supposto $(1+\frac{x}{n})^n - 1^n = 0$: fra tutti ...
ri trinomiali, il solo $(1+\frac{x}{n}) - 1$ sarà eguale a zero: onde $\frac{x}{n}$ altro non ...
trà essere, che zero. Per dimostrare ciò, che qui dico, si rifletta, che sec...
Eulero (§ 145: Cap: 9: Intro: in Ana: Infi:) i fattori del trinomio $pp - 2pqz\,Cos: \varphi$ ...
sono $qz - p(Cos: \varphi + \sqrt{-1}\cdot Sen: \varphi)$, $qz - p(Cos: \varphi - \sqrt{-1}\cdot Sen\, \varphi)$, e secondo lo stesso Eu...
fattore trinomiale è zero nei due casi $z = \frac{p}{q}\cdot(Cos: \varphi + \sqrt{-1}\cdot Sen: \varphi)$, $z = \frac{p}{q}\cdot(Cos: \varphi$ ...
$Sen: \varphi)$ (§: 146: Cap: 9: Intro: ...). Potendo però essere ancora $p - qz\cdot(Cos: \varphi$ ...
$\sqrt{-1}\cdot Sen\, \varphi)$, $p - qz(Cos: \varphi - \sqrt{-1}\cdot Sen: \varphi)$ fattori del trinomio $pp - 2pqz\cdot Cos: \varphi + qqzz$: ne...
ancora di $p = qz\cdot(Cos: \varphi + \sqrt{-1}\cdot Sen: \varphi)$, $p = qz\cdot(Cos: \varphi - \sqrt{-1}\cdot Sen\, \varphi)$ potrà essere il ...
re trinomiale eguale a zero. Se adunque costi essere p, qz quantità ...
sarà impossibile, che il fattore trinomiale $pp - 2pqz\cdot Cos: \varphi + qqzz$ possa esse...
eguale a zero. Si applichi tutto ciò ad un caso particolare. Sia la formola ...
$z^6 = 0$; e siano a, z quantità reali. I fattori trinomiali di questa for...
quali Eulero stesso assegna nel (§ 151: Cap: 9: Intro: ...) sono $a-z$, $aa - 2az\cdot$ ...
$\frac{2}{6}p + zz$, $aa - 2az\cdot Cos: \frac{4}{6}p + zz$, $a+z$. Ecco in questo caso sono i fattori trino...
essendo sì $a-z$, che $a+z$, le radici de fattori trinomiali quadrati. Paragonan...
il primo fattore trinomiale $aa - 2az\,Cos: \frac{2}{6}p + zz$ con il fattore trinomiale ...
rico $pp - 2pqz\cdot Cos: \varphi + qqzz$; sarà $a = p$, $q = 1$, $Cos: \varphi = Cos: \frac{2}{6}p = \frac{1}{2}$, $Sen\, \varphi =$ ...
$= \frac{\sqrt{3}}{2}$. In caso adunque di $z = a\cdot(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, $z = a\cdot(\frac{1}{2} - \sqrt{-1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$, $a = z(\frac{1}{2} + \sqrt{-1}$ ...

Ill.mo Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo

$z(k - \sqrt{-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})$. Operando con queste sostituzioni, si troverà sempre $a^6 - z^6 = 0$; il fattore trinomiale $aa - 2az \cdot Cos: \frac{2}{6}p + zz = 0$. Siccome però le quantità a, z, si suppongono reali; quindi sarà impossibile, che il fattore trinomiale sia zero. Per ciò necessario, che le quantità a, z siano immaginarie. Ciò che diciamo del primo fattore trinomiale, si dica del secondo $aa - 2az Cos: \frac{4}{6}p + zz$; e di qualunque altro vi fosse. Essendo però la formola $a^6 - z^6 = 0$, sarà necessario, che qualche de' fattori sia zero; non potendo adunque i fattori trinomiali essere zero, ha luogo a dire, che il fattore $a - z$ sia zero; onde $z = a$. Nell'ipotesi adunque, che nella formola $a^6 - z^6 = 0$, a, z siano quantità reali, il solo fattore quadratico $a^2 - 2az \cdot Cos: \frac{2 \cdot 0}{6}p + zz$, potrà essere zero. Si prenda ora una formola $a^n + z^n$. I fattori trinomiali di questa formola, come Eulero dimostra (§150: Cap: 9) sono compresi nella formola $aa - 2az \cdot Cos: \frac{2k+1}{n}p + zz$. Questi fattori trinomiali nei casi particolari si determinano come nello stesso paragrafo insegna Eulero dicendo. Patet omnes factores obtineri si loco 2k+1 omnes numeri impares non majores quam exponens n substituantur, iis vero casibus, quibus factor quadratus prodit, tantum ejus radicem factoribus annumerari debere. Se adunque in luogo di 2k+1 si ponga 1, 3, 5, 7, etc. si avranno tutti i fattori trinomiali di $a^n + z^n$. Che se poi n sia numero disparo, l'ultimo fattore trinomiale sarà $aa - 2az Cos: \frac{n}{n}p + zz$ eguale secondo Eulero stesso ad $aa + 2az + zz$: essendo $Cos: \frac{n}{n}p = Cos: p = -1$. In questo caso adunque essendo l'ultimo fattore quadrato, la radice $a + z$ si dovrà prendere per fattore della formola $a^n + z^n$. Da tutto ciò chiaramente siegue dover essere i fattori trinomiali della formola $a^n + z^n$ tutti trinomii, in caso che n sia numero pari; dover essere l'ultimo fattore $a + z$, in caso che n sia disparo. Così della formola $a^3 + z^3$ i fattori trinomiali quali pone Eulero nel citato paragrafo (150) sono $aa - 2az Cos: \frac{1}{3}p + zz$, $aa - 2az Cos: \frac{3}{3}p + zz$, $a + z$; della formola $a^6 + z^6$ i fattori trinomiali sono $aa - 2az Cos: \frac{1}{6}p + zz$, $aa - 2az Cos: \frac{3}{6}p + zz$, $aa - 2az Cos: \frac{5}{6}p + zz$. Tutto ciò posto si prenda la formola $a^n + z^n$: dico supposto n pari essere impossibile $a^n + z^n = 0$, se siano le quantità a, z reali. Acciò che $a^n + z^n$ sia zero, bisogna, che qualche fattore trinomiale sia zero: ma niuno de' fattori trinomiali può essere zero; come di sopra si è dimostrato, se a, o z non siano quantità immaginarie: dunque essendo n numero pari, ed essendo a, z quantità reali non può essere $a^n + z^n = 0$. Essendo n numero dispari oltre i fattori trinomiali vi sarà per fattore $a + z$: se adunque z non sia eguale [a −a], non può mai essere $a^n + z^n = 0$. Premesse tutte queste verità li espon[go]. La formola di Eulero è $(1 + \frac{x}{n})^n = x$. Supponendo $x = 1$ mi si concede dover essere i termini della formola $(1 + \frac{x}{n})^n - 1^n = 0$, perchè $\frac{x}{n}$ sia zero: dunque in questo caso i termini della formola $(1 + \frac{x}{n})^n - 1^n = 0$ sono reali mentre il primo termine $(1 + \frac{x}{n})$ mi si concede eguale ad $(1+0)$ ed il secondo è reale essendo 1. Ma di sopra si è dimostrato, che in questa supposizione niuno de' fattori trinomiali può essere zero, se non la radice $(1 + \frac{x}{n}) - 1$ del quadrato fattore. L'errore adunque di Eulero nasce dal fare in genere, della formola $(1 + \frac{x}{n})^n - 1^n = 0$, eguale a zero. Similmente il fattore trinomiale per Eulero nella seconda formola $(1 + \frac{x}{n})^n + 1^n = 0$, i termini dovendo essere $(1 + \frac{x}{n})$ ed 1 reali: se n si faccia numero pari, non potendo essere in questa supposizione alcun fattore trinomiale eguale a zero, sarà anche impossibile essere $(1 + \frac{x}{n})^n + 1^n = 0$. Se n si faccia numero dispari sarà allora l'ultimo fattore $(1 + \frac{x}{n}) + 1$: secondo Eulero $y = ni$, $\frac{x}{n} = i$: dunque l'ultimo fattore sarà $(1+i) + 1$, quale non potendo essere eguale a zero, sarà sempre impossibile essere $(1 + \frac{x}{n})^n + 1^n = 0$. Io non [nego] esser dubbio, che secondo Eulero il termine $(1 + \frac{x}{n})$ debba essere quantità infinitamente piccola; ma non è che si possa il fattore reale. Si suppone da Eulero i quantità infinitamente piccola immaginaria, si vuole $l(1+i) = i$, $l(1+i)^n = ni = y$: dunque da questa premessa non costa essere $\frac{x}{n}$ reale. Che poi in vigor del calcolo, quale usa Eulero, [sia] $\frac{x}{n}$ anche immaginario: questo viene dalle false supposizioni, quali ho ora accennate. Voglio anche concedere; supposto i infinitamente piccolo ed immaginario, essere $(1+i)^n$ eguale a più o meno uno, secondo la diversità dell'infinitamente piccolo immaginario i: ma quando si verrà a dire $l(1+i) = i$, ne domanderò la dimostrazione; essendo con la supposizione di i infinitamente piccolo, ed immaginario, lontana dalla commune Logaritmica, nella quale si dimostra; supposto i reale, $l(1+i) = i$.

306   $2^{do}$ ... to;

$4^{3do}$ =

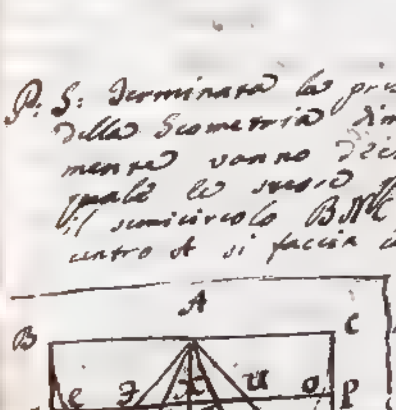
3   = - 2 -

Quando poi mi si dirà $(1+i)^n = ni$, dirò, dunque con ciò si vuole far concepire
Logaritmica, nella quale 1 sia il protonumero: nella distanza dal protonumer
fissata per $i$ infinitamente piccola, ed immaginaria la semiordinata imma
ria sia $(1+i)$: nella distanza $ni$ anche immaginaria, la semiordinata d
essere eguale a $(1+i)^n = \pm 1$: ma questo è lo stesso, che pervertire le idea
plicissima della Logaritmica, quelle idea sì bene ha rischiarata il Marches
ni con le invenzione dell'istrumento mechanico atto a descrivere questa
con un continuato moto; del quale istromento si degne lodi ha fatte il degni
suo Padre Conte Giacomo Riccati.

Queste riflessioni contro il metodo del grande Eulero non vedranno mai la jucti
se il primo non sia certo dell'uniformità del suo sentimento con il mio. Persua
dunque per mezzo di sua graziosa risposta potere convenire su la falsità de
metodo di Eulero, con la più alta stima, ed il più umile rispetto mi d

di V. S. Illma    Roma 18 Decembre 1778.

P. S. Terminata la presente mi sovviene ragione per mezzo la quale con
della Geometria dimostrar si puole, che se due grandezze $x$, ed $y$ congi
mente vanno decrescendo ridotte al zero, non avranno già quella ra
quale la stessa quantità $x$ ed $y$ avevano prima di annullarsi
il semicircolo BMC intorno a questo si descriva il rettangolo BCSL
centro A si faccia cadere la normale AN, e si tirino le linee AL, AS




tiri una linea qualunque QP parallela a BC, e si
pisca intorno la linea AN aggirarsi il rettangolo B
le linee $qe$, $op$, ed altre consimili descriveranno d
fascie circolari la linea $3u$ descriverà un circolo
mostra la geometria, essere costantemente la fas
generata dalla linea $qe$, eguale sempre al circolo g
dalla linea $3u$. Si tiri dal punto A la linea AM
quali dividano le linee LN, NS in parti eguali sara
per qualunque linea $Gx = G3$, $x3 = 3u$ onde $G3 = $ alla metà di
Dunque il circolo generato da $G3$, quarta parte del circolo generato da
la fascia adunque generata da $qe$, sarà sempre al circolo generat
$G3$ come 4:1. Avvicinandosi il punto $q$ al punto B, le fascie vanno
tinuamente decrescendo, e contemporaneamente vanno decrescendo ne
costante ragione i circoli descritti dalle linee consimili alla $G3$. Ar
il punto $q$ in B la fascia divien zero, e degenera in una perif
circolare, ed il circolo descritto dalle linee consimili alla $G3$ degener
un punto, quale è il punto A. Se adunque le fascie si dicano $x$, ed
colli corrispondenti si dicano $y$, sarà costantemente $x : y = 4 : 1$: ma
ridotta $x$ a zero, e nel tempo stesso anche $y$, dovendo essere, come
de, il zero di $x$ al zero di $y = 4 : 1$, sarebbe la periferia descritta
il raggio AB al punto A come 4 : 1; il che evidentemente ripugna.

Devotmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

Ill.mo Sig.r Sig.r P.rone Col.mo

395

Mi consola assai la sua lettera dei 16 Ottobre per sentire dalla medesima il suo buono stato di salute, onde possa continuare felicemente le sue meditazioni per aumento delle Mattematiche. Mi è piaciuta assai la scoperta che ha fatto intorno all'Acustica, e me ne rallegro ecc.

Stando io in Bologna, veddi parte dell'estratto delle Instituzioni analitiche di suo Fratello nel Giornale di Modena; però non sapevo che il Medesimo avesse scritto all'Autore del Giornale. Mi sembra che simili critici devano essere disprezzati, tanto più che le loro Opere non passeranno certamente alla posterità. Io ho veduta una Dissertazione eccellente di suo Fratello circa i logaritmi dei numeri negativi, anzi desiderei sapere, se la medesima si è ancora stampata, lo cui interessa assai più che tutto il Giornale di Modena.

Io studio assai per tirare avanti il mio Corso mattematico, perchè possa esser pieno di cose, ed al tempo stesso più breve

Di V. S. Ill.ma

Treviso 16 Xbre 1776

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco de' Malfatti. Ferrara

Divot.mo Obbl.mo Servitor Vero
Giordano Riccati

306 ... 394

$4x^2 =$

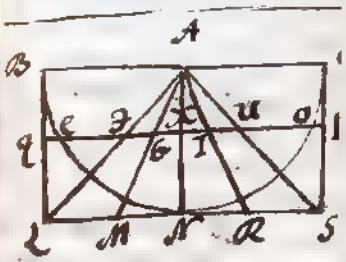
$= -2 -$

Quando poi ... Logaritmica, nella qua... forma ... infini... ria sia (1+i): nella... essere eguale ... plicissima della ... ni con li invenzioni ... con un continuato ... suo Padre Conte ...

Queste riflessioni ... con... se il primo non sia... dunque per mezzo di... metodo di Eulero,

Di V. S. Ill.ma Rom...

P. S. Terminata la ... della Geometria ... mente vanno ... quale la ... Il semicircolo B... centro A si facci...




per qualunque ... dunque il circolo ... la fascia adunque ... SI come 4:1. ... tinuamente dec... costante ragione ... il punto q in B ... circolare ed il ... un punto, quale ... colli corrispondenti ... ridotta x a zero ... de, il zero di x ... il raggio AB al punto B come 4: ...

e facile. Questo travaglio è penoso assai, e poco considerat... dal Pubblico, che si trova pieno e stanco oramai di tanti Cor... onde mi ci sono impiegato di mala voglia. Spero che il p... mo tomo sortirà in breve, e glielo manderò: contiene la Geometria, la Trigonometria, e le Sezioni Coniche. Nel s... condo Tomo darò unite la Aritmetica, e l'Algebra. Le desidero felicissimo l'Anno nuovo con altri moltis... e mi confermo con tutto l'animo

Di V. S. Ill.ma

Segovia 16 Xbre 1778

Aff.mo Ser.re e ...
Pietro Gian...

Devotmo ed Obligmo Servo
Giuseppe Calandrelli

ralfranco, … i
… giovani fa … ne-
… agnava la fi= … o,
… loga= … he
… inchiu- … uol
… inque,
… farmi … che
… dua la … esa-
… lla va: … larò
… poscia
… usi di … sioni
… desoso … nea
… na … di
… limo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 16 Xbre 1776

Div.mo Obb.mo Servitor Vero
Giordano Riccati

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco
de' Malfatti. Ferrara

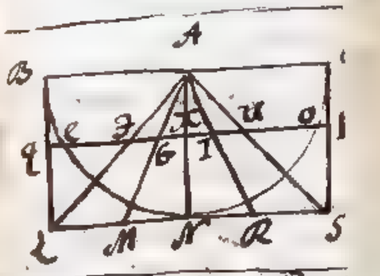
306 ... $4x^{3}$ = ... = -2-

Quando poi mi si dirà
Logaritmica, nella qua
serie ... infini
ria sia (1+1); nella
essere eguale ad ...
plicissima della ...
ni con le invenzioni
con un continuato ...
suo Padre Conte ...

Queste riflessioni con
se il primo non sia
dunque per mezzo di
metodo di Eulero,

A V. S. Ill.ma Roma

P. S. Terminato la
della Geometria ...
mente vanno ...
quale lo ...
Il semicircolo Bo...
centro A si facci...




per qualunque ...
dunque il circolo ...
la fascia adunque ...
S.I come 4:1. ...
tinuamente ...
costante e ragione
il punto q in B
circolare ed il
un punto, quale
colle corrispondenti
ridotta x a zero
de, il zero di x ...
il raggio AB al punto A come ...

All'Ill.mo Sig.r Sig.r Padrone Col.mo
Il Sig.r Conte Giordano Riccati
Treviso

Devot.mo ed Obblig.mo Servo
Giuseppe Calandrelli

Gentilissimo Signor Conte Prone. Stimatiss. 397

Ill.mo Sig.ra Sig.ra Prona Colma 395

sua lettera dei 23. 9bre mi fu spedita a Castelfranco, dove allor mi trovava. Ritornato due giorni fa a Treviso, mi sono posto subito a disegnare le figure spettanti alla lettera, che trattano dei logaritmi, le quali io m'era dimenticato di inchiudere nell'involtino. Gie la spedisco adunque, onde ricevendola prima di Natale, possa farmi il favore di leggere, e di esaminare amendue le dissertazioni nell'occasione favorevole delle vacanze per la detta solennità, scrivendomi poscia il sincero, e riputatissimo suo parere. Sensi di grazia i replicati disturbi, che le reco, e desideroso delli onore de' suoi comandi, con pienissima stima e rispetto mi sottoscrivo

Di V. S. Ill.ma

Treviso 16 Xbre 1776

Ill.mo Sig.r Gianfrancesco de Malfatti. Ferrara

Divot. Obbl. Servitor Vero
Giordano Riccati

306

= -x-

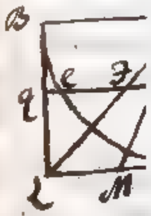
Quando poi si incidi... Logaritmica, nella qua... forma ... infini... ria ... (+1); nella... esser... eguale ad ... plicissima della ... ni con ... con un ... suo Padr...

3967

Questa ... se si pri... dunque ... metodo ...

A V. S. ...

P. S. Dev... della ... men... quale ... il sem... centro ...




pri... dunque ... la ... S. I. com... tina am... considera... il pun... circolar... un pun... colle con... ri dotta... de, il ... il ragi...

Gentilissimo Signor Conte Prone. Stimatiss.

$4x^3=$

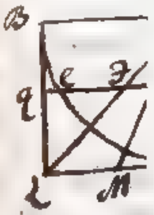
$=-2-$

Quando poi mi si dirà
Logaritmica, nella qua
fiera qq. le infini
ria sia (+i): nella
essere eguale a ll.
plicissima della L
ni con
con un a
suo Padr

Questo vi
re se pri
dunque b
metodo

P. V. H

P. S. Ser
della
mente
eguale
il sem
centro




per q
dunque
la fa
S.I com
tinuam
costante
il punt
circolar
un pun
colle cor
ridotta
de, il
il ragi

...na di far tirare i rami delle figure che vanno annesse all'articolo
...sono falso, anzi pur prima di farvi rimetter la mano dell'incisore
...er correggervi alcuni errori che vi ho scoperti, ne mando a Lei un esem-
...lare perchè Ella lo esamini. Ecco gli errori rilevati da me.
...maggior parte degli N sono rovesci e questi si aggiusteranno.
Nella fig. 2. Tav. 1. manca la lettera O sotto il circolo nel punto diame- ...i
...almente opposto alla lettera O'.
...l centro dello stesso circolo manca un L.
Nella fig. 4. al centro del circolo manca un L. ne.
Nella fig. 5. manca una lineetta all'N. superiore d.a linea N'N ...o,
Nella stessa manca un L nel punto dell'intersez.e d.a linea N'N colla ...he
...inea [illegible] ...uol

...i sono errori più evidenti ma quelli che son per dire possono essere ...che
...i maggior importanza. esa-
...ubito che nella fig. 2. il L collocato al fin d.a curva G'7G dovesse collo- ...farò
...rsi piuttosto a fin d.a retta [illegible]. Ella osservi ancora se la detta curva
...a ben descritta. ...issioni;
...ubito se il vertice d.e due parabole (Fig. 5.) NLZ, ZaEaN dovesse ...nea
...ocarsi nel punto Z dov'è, ovvero nel punto L. L'originale della figu- ...di
...non m'illumina abbastanza, e non ho il ms. ch'è già da più mesi ...issimo,
...man d.o stampatore.
...do assolutam.e che sia sbagliata d'assai la fig. 10. dove la massima saetta
...risponde al punto f e dovrebbe corrispondere al punto d.

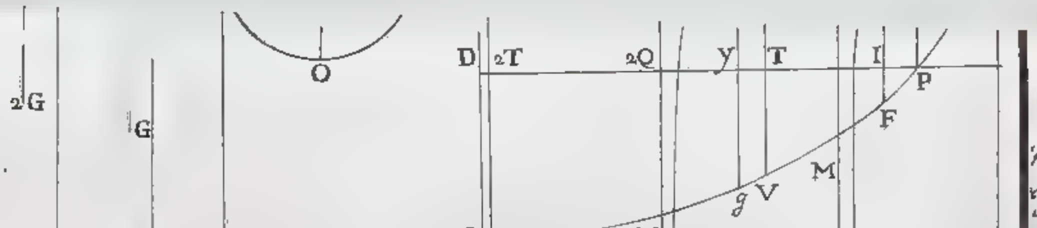


Fig. 3. ...tor vero ...effatti

...

Ella avrà la bontà di decidermi interam.^te su questi dubbj e di notare mi-
nutam.^te tutti gli altri errori ch'io non avessi avvertito, che tutti saran-
no esattamente corretti. Del resto io spero ch'Ella rimarrà contenta
della nitezza d.^e figure, e della stampa non meno, la quale però a
cagione del nuovo carattere che si è dovuto aspettar più mesi e di
cifre algebraiche che pur mancavano va con una lentezza da far
perdere la pazienza. Spero però che in Quaresima l'opera potrà pub-
blicarsi. La prego a mandarmi presto la correzione d.^e figure acciò
io possa darla all'incisore sinchè egli è a mia disposizione. E
sono con tutta la stima e l'ossequio

Di Lei Sig. Conte Pron.e Stimatiss.^o

Ferrara 10. xbre 76.

Dev.o ed Obb.^l Serv.^e
Alessandro Zorzi

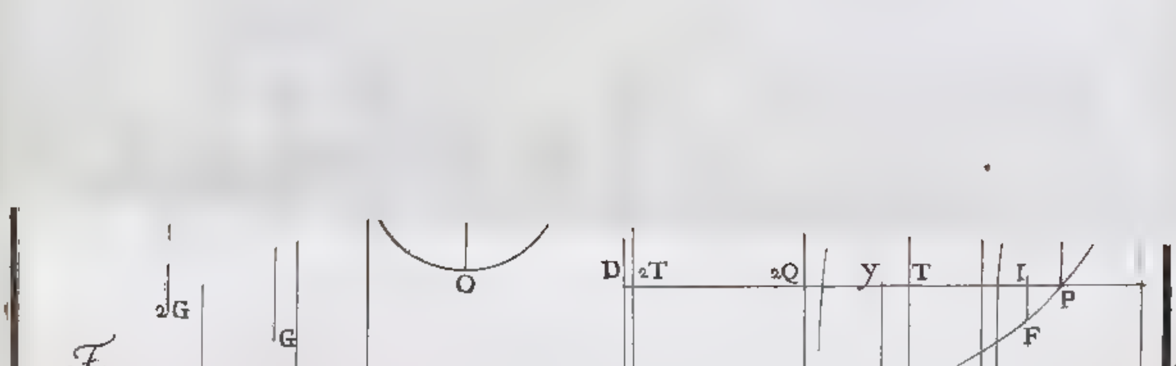



Fig. 3

Stampe in rame

All' Nobile Sig. Sig. Prone Colmo

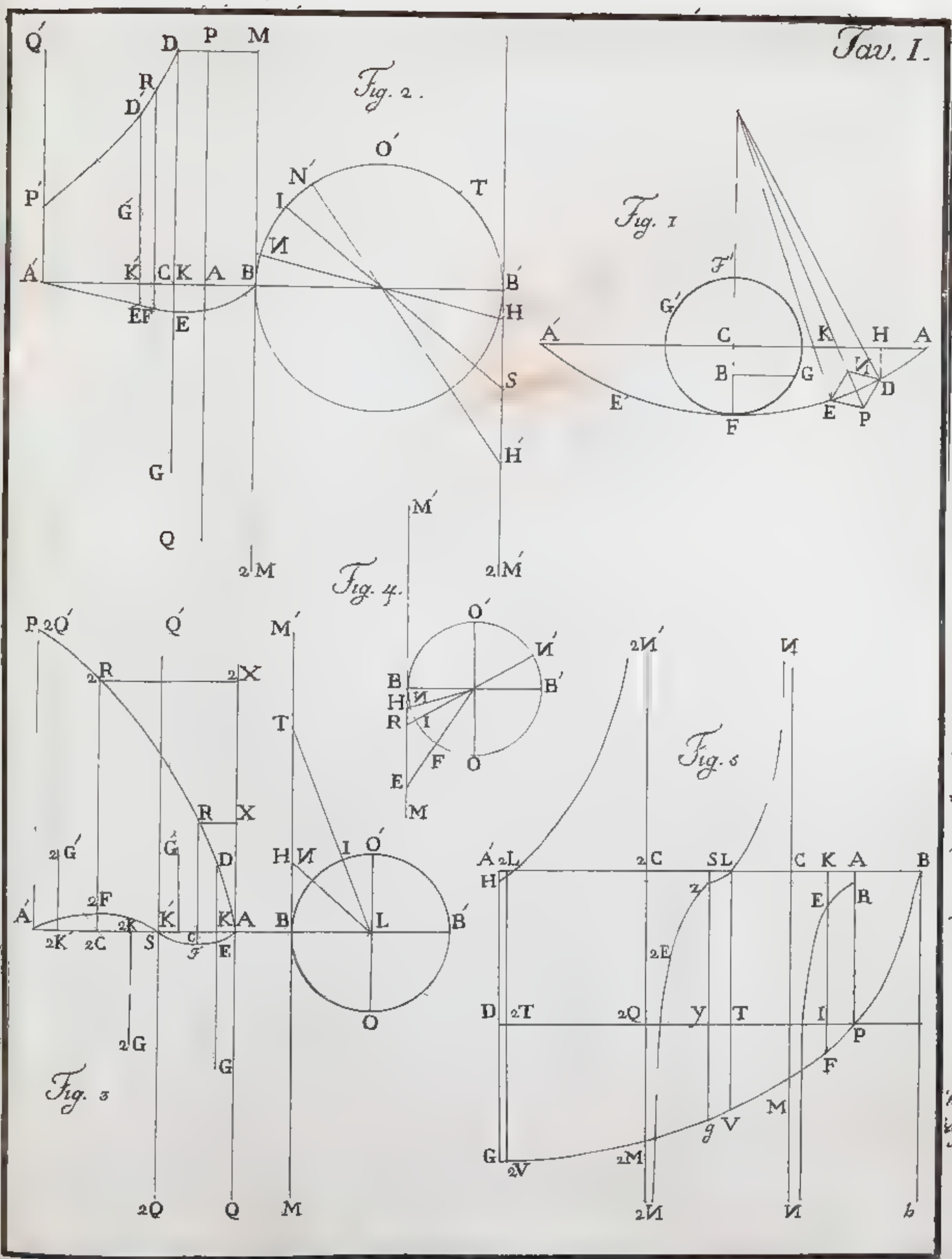
Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia p. Treviso

B. P.

Ill.mo Sig. Conte Barone Stimat.






e
zo,
ere
-lei
un
sto ne-
ssio,
anche
ci suol
ggio
o, che
o, esa-
, farò
ha
mmissioni
bontà
o di
dissimo,

itor Vero
disfatti

...tissimo Nicolai

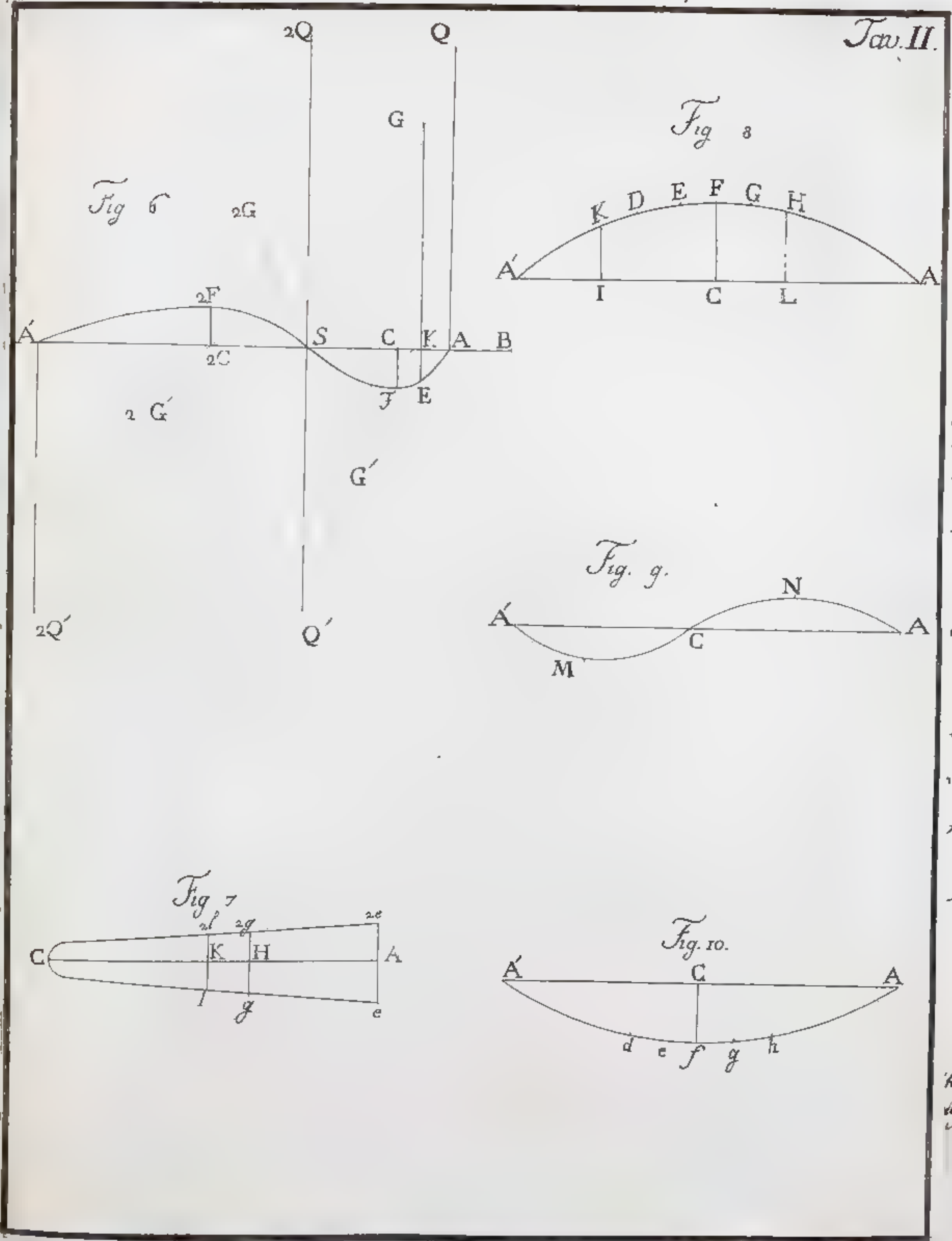
306

Quando
Logaritm
ria si
esser d
plicissi
ni con
con un
suo Pa

Questo
le il pr
Dunque
metodo

P. S.
della
men
Il
un

pr
Dunq
Ca
S.I co
tinua
costa
il pu
circo
an
col
ri do
de, il
il ra




ro,
ere
-lei
un
...tto ne-
...zzio,
anche
si suol
...ggio
...o, che
...o, esa-
..., farò
ha
...missioni
bontà
...o di
...dissimo,

...tor Vero
...bligatti

...dissimo ... Nicolai

306

Quando
Logaritm
fensa
riā si
esser d
plicissi
ni con
con un
suo Pa

Questo
se si pr
dunque
metodo

P. S. D
della
men
qua
V.I
cent

pro
dunque
la q
SI co
tina
copia
il pu
circol
un
coll
ri do
do, il
il ra

nas
il fin
pre
ovo
om
essi
che
que
din
di
hon
mi
in
co
ci
or
ut
ch
Di p

[Av]endo ricevuto il foglio delle figure, io mi son messo a leggere le belle lettere [de]l fu Conte Vincenzo sulla questione dei logaritmi delle quantità negative; [s]pero di sbrigarle tra poco. Durerò maggior fatica a riandare le lettere [di] V.S. Ill.ma, perche non ho avuto in mano tutta la serie de' Teoremi da lei [t]rovati sulle corde, e poi mi presenta de' calcoli, che possono atterrire un uomo. Vedo bene che la difficoltà estrema della materia porta a questo necessariamente, ma per riveder tutto per minuto, mi farebbe d'uopo un ozio, che non m'è possibile di rinvenire. Ciò per altro non è necessario, perche quegli che scrive è un uomo, che sa tenere la penna in mano, come si suol dire; e un esame minuto di tali cose potrebbe al più produrre il vantaggio di coreggere un qualche errorusso da niente, in cui non cadono se non coloro, che non scrivono mai. Come io per ubbidirla, avrò tutto letto, e, come so, esaminato, quando non m'insorga alcuna difficoltà importante da comunicarle, farò l'involto di ogni cosa, e lo spedirò al Sig.r Ab. Troilo, siccome Ella mi ha comandato. Ella si accerti, che io riceve sempre per un onore le commissioni che da lei mi vengono, e che quando dalla sua parte Ella abbia la bontà di accomodarsi alle mie intricate circostanze, mi sarà sempre gratissimo di ubbidirla, e di dimostrarle in quella maniera, che posso, la stima grandissima che le professo, e il rispettoso ossequio, con cui mi dichiaro, per sempre

Ferrara li 22 Xbre 1778

Di V.S. Ill.ma

Dev.mo Obbligatiss.mo Servitor Vero
G. Francesco Malfatti

[illegible] ... di Milano
[illegible] Padova [illegible]

[illegible]
Giambattista Nicolai

306 400

Quan
Logar
frest
ria
esser
glici
mi
con
suo

Queste
e, si
Dunq
metro

A V.

P. S:
De
m
V.
u

pro
Dun
Lo
S.
tim
cop
il
circ
an
coll
ri
de
il

conse[illegible]

relas[illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] Lo [illegible] di [illegible] di [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] Nicolai

B.B.

All Nobile Sig.r Sig.r Pron.e Col.mo
Il Sig. Conte Giordano Riccati

p Venezia

Treviso

Nob. Sig.r Co:



Il Sig.r Gonzino(?) Libraio ora, mi disse, commissione da quello di Bologna
di mandare lo Inserto, finchè l'I. Autore lo mandasse a prendere.
Sicchè sarà presso a poco arrivato in casa. Giunto che sia lo
consegnerò alla Posta, e le capiterà ~~[illegible]~~ esso mezzo di questa
città. — Se a caso, che non corresse, anche il Sig.r Dalla Volpe li-
cenziasse di stampare più di sei Trattati di Musica, si esibisce il Sig.r
P. Tealdo di stamparli a Vicenza, se si potesse avere miglior maniera.
giacchè qui è inutile ogni maneggio. Il Sig.r Molini di Vicenza
è Libraio di gran riputazione, conosciuto anche dal nostro Bibliotecario
Ricciardi(?) ... e che farebbe, lo so, anch'egli ogni sforzo per compiacere

Il P. Maestro Vallotti è, come mi vien detto, sotto i Torchj il suo primo
Volume di Musica, che tratta della Teorica: con me però non ne fa
un mistero, ed io fingo d'ignorare la sua intrapresa. Per questa parte
... spero molto. — La mia seconda Dissertazione si stampa lentamente,
... con chiarezza il mio modo nei suggerire delle carte [illegible]
dedotte dall' [illegible] della Parabola [illegible], che [illegible] però
bisogno del pregiatissimo e sincero suo giudizio per assicurarmi della felice
riuscita a tempo opportuno. Intanto [illegible]
[illegible] mi do l'onore di rassegnarmi di V.S.

[illegible] Padova [illegible]

Umil.mo Devot.mo Obblig.mo Servitore
Giambattista Nicolai

306

4

=

Quand
Legen
fresc
ria
aveni
plici
ni a
con u
vuo

Questi
se si
Dunq
mero

P. V.

P. S.
Du
m
V.
c

pri
Dun
(ad
53
tine
coji
il
circ
an
colt
ri
d2,
il

400

BB

Nob. Sig.^r Co:

403

306

BB

1103
403

Nob. Sig.r Co:

Questo Ill.mo Sig.r Ab. Nicolai P.P. m'incarica d'
avanzarle il fag.to che da qualche tempo m'
è stato spedito dal Sig.r Lucchesini Librajo di
Bologna, da cui sono stato avvisato che V. S.
Ill.ma l'avrebbe mandato a prendere, motti-
vo per cui non l'ho spedito prima d'ora. Sopra
d.to fag.to ho incontrata la spesa di L 4: quali
con tutto di Lei comodo me le farà tenere. e
col piacere di renderla servita, col maggior osse-
quio mi dico

Di Lei Nob. Sig.r Co:

Um.o Dev.o Servitore
Giuseppe Comino

11 Xbre 1778

per
altro io mi accorgo, che Ella è persuasa essere 1:-1::5!:1,
massimamente che nella sua gentilissima lettera
nulla risponde alla riflessione secondo il mio parer
decisiva, che tre quantità non cangiano proporzione,
quando

306

404

Quand
Logar
fecond
riad
averi
plicis
ni a
con u
suo b

Quest
le se
dungh
metro

P. Vo

P. S.
Du
m
V.

B
q
L

pro
dun
la b
59
tin
cosi
il
circ
an
colt
ri
de
il

pa
alt
m
ne
de

pare
altro io mi accorgo, che ella è [illegible] essere 1 : -1 :: -1 : 1,
massimamente che nella sua gentilissima lettera
nella risposta alla riflessione secondo il mio parer
[illegible], che tai gravità non cangiano proporzione,
quando.

306

4.
=
Quand
Legor
frescà
rià
aveiè
plicis
nè c
con
suo

Questi
se sl
dungh
meto

A Vo

P. S.
Du
m
V.
c

B

prē
dun
(ab
SJ.
tina
cosj
il
circa
an
colt
riò
de,
il

P. R.

sif
ua
su
sti
do
la
–
ua
ue
tai
ui
a
li
de
n
del
m.
vi
la
ta
for
da
vas
pai
alt
m
ne
To

Sig.r Conte [illegible] — Bologna 29 Xbre 1728 — 2407

[illegible] ha mandato subito alla risposta sua, che avrei do-

Ill.mo Sig.r Sig.r P.rone Col.mo — 405

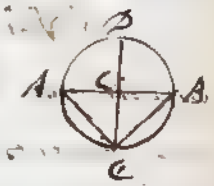
sono debitore di risposta a due sue acutissime lettere, stimatissimo Sig.r Abate. Cominciando da quella dei 26 7bre, ho piacere che sia persuaso, che assunta la unità per protonumero, siano parimente tali $-1$, e $\pm\sqrt{-1}$, il che conferma la sentenza di Gio. Bernoulli, e di me, che due quantità uguali una positiva, l'altra negativa abbiano gli stessi logaritmi, e getta a terra tutto il sistema de' logaritmi de' Sig.ri Leibnizio, e Bernoulli, secondo i quali a $+1$, e a $-1$ competono logaritmi totalmente diversi.

È verissimo, che il metodo da me proposto per determinare la tangente di qualunque arco $\frac{p}{n}$, $\frac{2p}{n}$, $\frac{3p}{n}$, $\frac{4p}{n}$ &c. si riduce ad un caso particolare del metodo più esteso di Gio. Bernoulli. Io l'ho inserito nella mia lettera non per dare una soluzione compiuta del problema, ma come un corollario, che mi si è offerto dalle cose dette precedentemente. È molto elegante la sua deduzione dalla formola espressiva degli archi del metodo più generale del Bernoulli.

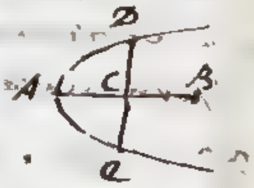
raziocinio, che Ella ha trascritto, il Leibnitz l'ha usato, perchè impegnato a sostenere una falsa sentenza. Del altro io mi accorgo, che Ella è persuasa essere $1:-1::-1:1$, massimamente che nella sua gentilissima lettera nulla risponde alla riflessione secondo il mio parere decisiva, che due quantità non cangiano proporzione,

quando

quando si moltiplicano per la stessa quantità. Non si muterà dunque la relazione di quei ... moltiplicando i medii termini per = 1, onde divengano ... = 1, ... , e si abbia per conseguenza ... come ... d'uno ... il che conferma ...



Il circolo A D B C descritto col raggio AC = 1 ha certamente due ordinate contrariamente situate (CD = 1, e CB = − ...) ed essendo rettangolo il triangolo ACB, ne risulta l'analogia AC : CD :: CD : CB ...



Similmente nella parabola D A C, dalla equazione $ax = y^2$, non solo la ordinata CD = y, ma ancora la ordinata CC = ... è media proporzionale fra il parametro CB = a ed l'ascissa AC = x, onde si abbia

CB : CC :: CD : AC

a : ... y :: ... y : x

e ponendo a = x = y = 1, ...

1 : −1 :: −1 : 1

Nel prossimo ordinario risponderò alla sua dei ... Decembre, ed intanto col rinnovarle gli attestati della mia venerazione, non manco di protestarmi ... Di V. S. Ill.ma

Treviso, 24 xbre 1776

Ill.mo Sig.r Ab. Giuseppe Calandrelli. Roma

Divotiss.mo Obblig.mo Servitore
Giordano Riccati

Sig.r Conte [illegible] Bologna 29 Xbre 1778

2407

[illegible] ha mandato subito alla [illegible] sua, che [illegible]

Quan
Leger
fren
ria
esser
glici
ni
con
suo
Queste
il
lung
meto

A V.

P. S.
D.
m
V.

pri
Dun
Le
SJ
tin
cos
il
cir
an
col
ri
de
il

R.R

lou
to
uen
v. e
les b
Reg
uar
uar
uer
iéro
ua
'co
arg
la 8
ree
io
au
ine
repr

S.r Conte D. Prospero — Bologna 29 Xbre 1778

2407

[N]on ho risposto subito alla pregiat.ma sua, che avrei vo-
[...]to poter darle una qualche risposta concludente; ma
[...]mendosi risolvere di questo, benedetto l'uomo della bol-
[...]e è proprio una disperazione; basta dire che il buon
[...] Vincenzo non la può reggere, e fu necessitato di
[...]dersi altrove. Tutto ciò non ostante volli prendere
[...]na qualche informazione con qual passo procedea l'
[...]era del P. M.ro Marini, e come la ricevea lo stesso, e lo
[...]ro essi nel convento, non ostante che [...]
[...]icevano bene dal Vesc.o, che mi disse che [...]
[...]mato appresso, e incoraggiarono che potesse riuscire
[...] continuare la stampa della sua Opera. Con questo
[...]ggio davvero che non ho avuto coraggio di parlare
[...]l Vesc.o per sapere quando anche l'avessi ridotto a una
[...]ndere l'Opera, che già mi aveva molto tempo, avremmo
[...]o potuto conchiudere. Quello che posso fare si è di
[...] sull'istesso del partito, che prenderà il P. M.ro Ma-
[...]ni, perchè o troverà qualche altro stampatore, che in-
[...]raprenderà la sua Opera, o continuerà dal med.o Vesco-

306

Se succede il S.r caso non vi veggo per ora certo alcuna que-
stura; se poi il primo, o potremo ricorrere anche noi bel nuovo
Stampatore, o all'esempio della Volpe, che fingesi [illegible]
simulazione potrebbe indurmi a far quello, che ora non
saprei sperare. Anche i Soci dell'Accademia dell'[illegible]
Istituto son tutti Autori che si ajutarono, eppure è
obbligato di servirne quel Luogo; [illegible] quale [illegible]
mento se possa [illegible] in un [illegible] di [illegible]
tutto ciò non [illegible] certo [illegible] d'affare, e non
tacerò di approfittarmi di [illegible] [illegible]
che mi si porgerà ancor, perchè mi pare proprio un
[illegible] [illegible] di [illegible] [illegible] in [illegible]
[illegible] le altre.

A quest'ora il debito avrà ricevuto dal S.r [illegible]
nuovo di Padova le [illegible] [illegible]
[illegible]. Per finire [illegible] il [illegible] [illegible]
e se potrà dire che l'incomodi d'una delle
[illegible] [illegible]. La [illegible] [illegible] e di [illegible]
padre. Non [illegible] [illegible] di più [illegible] [illegible] [illegible]
la dovuta stima, ed ossequio
[illegible]

Divot.mo ed Obbligat.mo Serv.re
Giac.o [illegible] [illegible]

4

Al Nobil Uomo

Il Sig. Conte Giordano Riccati

Venezia

Treviso

4

[illegible] Orme
[illegible] Cesare Giordano [illegible]
[illegible]
[illegible] [illegible]

BIBLIOTECA CIVICA DI UDINE

Sig. Co. Padrone e Amico Stimatissimo
Treviso 2. Dic. 1778

colmelloni di limena fanno due effetti, l'uno di dividere le acque, acciochè non ne entri che certa quantità; ed a spiegar tale uso, par proprio il vocabolo di castellum; che il Mar. Poleni de castellis p. così discorre: « Atque ipsa non modo fluminibus iis fecere Alveos, verum etiam, ne ex Alveis Flumina effluerent et curavere et curare pluribus modis; aut moliendo aggeres; aut nimis tardum aquae motum augendo; aut nimis (minuendo) celerem; aut aquam per fossas derivando; ita vero fieri solent derivationes, ut per fossas ipsas per structa in aggeribus castella influant aquae. L'altro effetto è per impedire i danni delle piene, mediante quelle che si chiamano Porte, e Bovoni, i quali latinamente si dicono cataractae: il vostro nell'etimologico: « vocantur etiam hoc nomine portae, quibus sublatis fluminum aquae emittentur, ac demissis, retinentur » così Roberto Stefano nel Tesoro, che non cita neppur un esempio d'antico autore, ma il solo Budeo, soggiungendo che vulgo vocantur des bonder: cioè in francese, che si volgarizza chiusa, cateratta chiave. Il Dizionario del Facciolati reca il medesimo significato, e cita Plinio (lib.) 6. ep., ma quel verso 6. non si può ritrovare in alcuno de' due Plinii. Bensì nelle Lettere del ... lib. X. ep. 69 si legge: « Superest si placeret fossam longius ducere, et arctius pressam mari aequare, nec in flumen, sed in ipsum mare emittere, ... repressus maris servabit et reprimet quidquid e lacu veniet. Quorum si nihil nobis loci natura praestaret, expeditum tamen erat cataractis